Arriaga • Benítez

Secundaria

Matemáticas 3 Por competencias

Matemáticas III
Tercer grado
Educación Secundaria

Guía del Maestro

APRENDER, SIEMPRE

PEARSON

Secundaria

Arriaga • Benítez

Matemáticas 3 por competencias

Matemáticas III
Tercer grado
Educación Secundaria

Guía del Maestro

PEARSON

Datos de catalogación

Autores: Arriaga Robles, Alan,
Marcos Manuel Benítez Castanedo
Guía del Maestro.
Matemáticas 3. Por competencias
Tercer grado, educación secundaria
1a Edición

Pearson Educación, México, 2014
ISBN: 978-607-32-2763-6
Área: Secundaria

Formato: 20.5 × 27 cm Páginas: 304

Matemáticas 3. Por competencias. Guía del Maestro

El proyecto didáctico *Matemáticas 3. Por competencias. Guía del Maestro* es una obra colectiva creada por encargo de la editorial Pearson Educación de México, por un equipo de profesionales en distintas áreas, que trabajaron siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento pedagógico de Pearson Educación de México.

Especialistas en Matemáticas responsables de los contenidos y su revisión técnico-pedagógica:
Obra original: Arriaga Robles, Alan y Marcos Manuel Benítez Castanedo
Colaboración especial: Sergio Isidoro Alpízar Jiménez y Vicente Zimbrón Jiménez

Dirección general: Philip De la Vega ■ **Dirección K-12:** Santiago Gutiérrez ■ **Gerencia editorial K-12:** Jorge Luis Íñiguez ■ **Coordinación editorial K-9:** Marcela Alois ■ **Coordinación de arte y diseño:** Asbel Ramírez

Editado por: EDIMEND, S.A. de C.V. ■ **Director general:** Francisco Méndez Gutiérrez ■ **Director editorial:** Alberto García Rodríguez ■ **Gerente de contenidos:** Gabriela Ramírez Salgado ■ **Coordinación de contenidos Secundaria:** Mariana Calero Sánchez ■ **Jefatura de edición:** Angélica C. Sánchez Celaya ■ **Edición:** Equipo editorial Edimend ■ **Jefatura de diseño:** Mario A. Tenorio Murillo ■ **Diseño y formación editorial:** Ricardo D. López Flores, Alexandro Portales Padilla y Alejandra Bolaños Ávila ■ **Corrección de estilo y editorial:** Mario Ortega Díaz ■ **Diseño de portada:** Mario A. Tenorio Murillo ■ **Ilustraciones:** Eloy Padilla Puga ■ **Fotografías:** Beatriz Mendoza Alvarez, Depositphotos y Shutterstock.

ISBN: 978-607-32-2763-6

Atlacomulco 500, 5° piso
Col. Industrial Atoto, C.P. 53519
Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031

Impreso en México. *Printed in Mexico*

PEARSON

PRESENTACIÓN

Uno de los retos que tiene la educación secundaria, es propiciar que el alumno desarrolle las competencias básicas que le serán útiles y podrá aplicar a lo largo de su vida. Asimismo y como parte del nuevo enfoque de la educación básica, es que el alumno también logrará aprendizajes esperados que junto a los estándares curriculares permitirá que consolide las competencias, tanto las específicas de la asignatura, como las básicas.

Como parte del proceso de enseñanza-aprendizaje, los agentes docente-alumno, bajo el enfoque del constructivismo, se conciben de una manera distinta, ya que el primero es una guía que orienta al segundo, durante su proceso de aprendizaje, el cual es completamente activo dentro y fuera del aula. De esta manera, se observa la gran importancia que tiene el docente, como pieza clave para conducir y facilitar al estudiante los elementos y experiencias necesarias para desarrollar sus conocimientos, habilidades y actitudes.

El mundo contemporáneo cada vez está propiciando que se establezcan distintas visiones sobre el mundo que nos rodea y en particular sobre las formas en las que se solucionan los problemas haciendo uso del razonamiento. Para plantear una solución, se hacen uso de simbolismos y correlaciones mediante el lenguaje matemático, de aquí la importancia de la asignatura en la educación básica.

Por tal motivo, el propósito fundamental de esta guía del maestro, es auxiliar al docente en el mejor aprovechamiento de los contenidos del libro del alumno. Así pues se ofrecen herramientas para romper el paradigma tradicional de la enseñanza y ayudar a promover una educación basada en competencias, por tal motivo esta guía del maestro está dividida en distintas secciones donde se describirán los cambios más significativos del nuevo enfoque de la educación básica y de la asignatura de Matemáticas 3, sugerencias para planificar el trabajo en el aula, el uso y manejo de las secciones en el libro del alumno, la relación entre los aprendizajes esperados, estándares curriculares y competencias con la evaluación, entre otros.

Estamos seguros de que este libro se convertirá en un instrumento útil y capaz para complementar su labor docente. Pearson Educación, reitera su apoyo y espera que este ciclo escolar esté lleno de satisfacciones y éxitos.

ÍNDICE

ESTRUCTURA DE LA OBRA

Las **Orientaciones didácticas de la Guía del maestro** se dividen en las siguientes secciones:

Enfoque de la asignatura Matemáticas 3

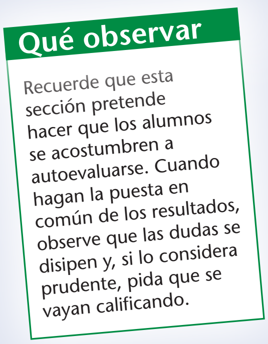
Aquí se señalan los lineamientos de la asignatura a partir de sus competencias, ejes, Aprendizajes esperados, Estándares curriculares y su importancia en la educación básica.

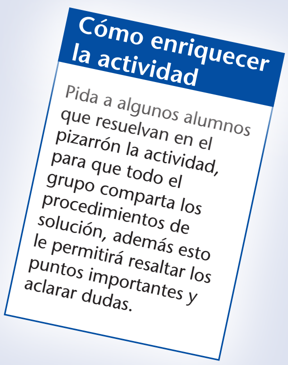
Trabajo en el aula por secuencias didácticas

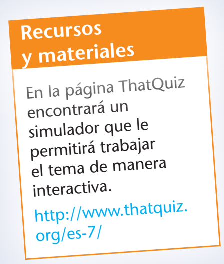
Proporciona los elementos para que el profesor guíe el proceso de enseñanza-aprendizaje a partir del uso de secuencias didácticas.

Uso del libro del alumno

En esta sección se describe la forma en la que se pueden aprovechar las sugerencias didácticas proporcionadas. Asimismo, dentro de este apartado encontrará:







Qué observar

Se hacen acotaciones al margen de ciertos temas con el fin de sugerir sobre qué puntos profundizar.

Cómo enriquecer la actividad

Se plantean sugerencias para realizar tareas adicionales, a partir de las que el adolescente tiene que elaborar y que están incluidas en el libro del alumno.

Recursos y materiales

Esta sección incluye propuestas de recursos electrónicos para complementar el tema que se está estudiando.

Curiosidades, acertijos y más

Plantea situaciones o problemas interesantes aplicados a las matemáticas y al tema que se revisa. Asimismo, refiere anécdotas relacionadas con los temas que se están viendo.

Curiosidades, acertijos y más

René Descartes (1596-1650) hizo importantes aportaciones relacionadas con la geometría plana y del espacio. Algunas de estas aportaciones se siguen utilizando en sus mismos términos hasta el día de hoy, por convenios establecidos por las sociedades matemáticas.

Reflexión

Pida a los alumnos que reflexionen acerca del siguiente pensamiento: "Si le das pescado a un hombre hambriento, le nutres durante una jornada. Si le enseñas a pescar, le nutrirás toda su vida" (Lao Tsé).

Reflexión

En esta sección se deja información que propicie que el alumno reflexione sobre los valores humanos, el trabajo colaborativo, etcétera.

Bitácora pedagógica

Bitácora pedagógica

Este espacio está destinado para que el docente lleve un "diario pedagógico" para que anote los aspectos más relevantes del proceso enseñanza-aprendizaje.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

Verifique mediante preguntas abiertas la aplicación de este tipo de expresiones en el conocimiento de diversidad de un área determinada, con el fin de conocer las dimensiones donde se realiza un muestreo que permita conocer la diversidad de especies de plantas y animales.

Transversalidad

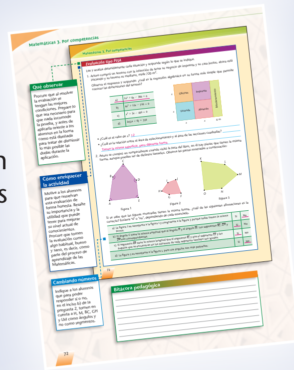
Propone actividades que pueden realizarse con otras asignaturas a partir de la relación que existe a nivel contenido entre éstas.

Cambiando números

Solicite a los alumnos que realicen la gráfica en su cuaderno, considerando las siguientes características: la línea verde y la naranja deben llegar al 10 en x.

Cambiando números

En esta sección se incluyen modificaciones para realizar las actividades propuestas.



Evaluación a partir de la prueba PISA

En este apartado se describe la importancia de la evaluación de las competencias, Estándares curriculares y Aprendizajes esperados, con base en la prueba tipo PISA.

Planificación mensual

Aquí se incluye un formato mensual donde se señala: las semanas, fechas de trabajo, y la distribución de los temas a lo largo del año escolar.

Libro del alumno

Aquí se incluye un formato mensual donde se señala: las semanas, fechas de trabajo, y la distribución de los temas a lo largo del año escolar.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Antes de comenzar a explicar a detalle las sugerencias didácticas para las actividades del libro del alumno, es importante describir los fundamentos sobre los cuales fueron planificadas cada una de las secciones ofrecidas a fin de proveer una herramienta útil para la labor docente.

Uno de los primeros puntos bajos los cuales se consideró la elaboración del libro del alumno, fue a partir de la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) 2011, la cual tiene el propósito de formar ciudadanos críticos, democráticos y creativos, a partir de dos dimensiones:

- *Dimensión nacional*: implica que el adolescente construya su identidad personal y nacional, asimismo que valore su entorno y se desarrolle como persona plena.
- *Dimensión global*: el alumno desarrollará competencias para que pueda aplicarlas tanto en el aula como en su entorno, además de que le resulten de utilidad a lo largo de toda su vida.

Algo sobresaliente de la RIEB 2011 es que concibe a la educación básica en un solo mapa curricular, donde cada una de las asignaturas se construyen a partir de una articulación, es decir que conforme el alumno vaya avanzando en su educación, irá movilizando sus saberes hacia otras asignaturas, así pues, la articulación también puede observarse en los procesos pedagógicos y en los procedimientos de evaluación.

Algunos de los planteamientos pedagógicos y didácticos más importantes y que la RIEB 2011 considera son los siguientes:

1. El alumno y sus procesos de aprendizaje son el centro de atención

Desde etapas tempranas se necesita provocar en el alumno, disposición y capacidad para continuar aprendiendo durante toda su vida, a fin de que desarrolle habilidades superiores de pensamiento y pueda solucionar problemas, pensar críticamente, comprender y explicar situaciones desde diferentes puntos de vista.

2. Es importante la planificación para potenciar el aprendizaje

Como parte de la labor docente, planificar el aprendizaje permite potenciar el desarrollo de las competencias en los estudiantes. Para ello, hay que organizar las actividades en distintas formas de trabajo, hacer uso de las secuencias didácticas, el trabajo por proyectos, por mencionar algunos. Algo sobresaliente, es que las actividades que se propongan, deben ofrecer desafíos intelectuales a los estudiantes, para generar opciones para su resolución.

3. Hay que generar ambientes de aprendizaje

En estos espacios de aprendizaje, el estudiante podrá desarrollar la comunicación e interactuar con otros alumnos para construir su aprendizaje a partir de distintas situaciones.

4. El trabajo colaborativo promueve la construcción del aprendizaje

Esta consideración pedagógica y didáctica involucra tanto a estudiantes como a maestros y dicta las pautas para guiar las acciones hacia el descubrimiento, planteamiento de soluciones, coincidencias y diferencias para generar un aprendizaje colectivo.

Es primordial que la escuela fomente el trabajo colaborativo para que el aprendizaje sea inclusivo, llegue a metas, favorezca el liderazgo compartido, permita el intercambio de recursos, desarrollo del sentido de responsabilidad y corresponsabilidad, además de que permita que el aprendizaje se realice en entornos presenciales y virtuales.

5. Hay que desarrollar las competencias, lograr los Estándares curriculares y los Aprendizajes esperados

Poner énfasis en el desarrollo de competencias, el logro de los Estándares curriculares y los Aprendizajes esperados, por lo tanto hay que favorecer el desarrollo de:

Competencias

- Capacidad de responder a diferentes situaciones; implica un saber hacer (habilidades) con un saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias con ese valor (valores y actitudes).

Estándares curriculares

- Son descriptores de logros y definen aquello que los alumnos demostrarán al concluir un periodo escolar; sintetizan los Aprendizajes esperados y son equiparables con estándares internacionales y en conjunto, con los Aprendizajes esperados, constituyen referentes para evaluaciones nacionales e internacionales que sirven para conocer el avance de los estudiantes durante su tránsito en la educación básica.

Aprendizajes esperados

- Son indicadores de logro que, en términos de la temporalidad establecida, definen lo que se espera de cada alumno haga en términos de saber y saber hacer, además de dar concreción al trabajo docente al constatar lo que los estudiantes logran y constituyen un referente para la planificación y la evaluación en el aula.

6. El uso de materiales educativos favorece el aprendizaje

El uso de la Biblioteca Escolar y de Aula, contribuyen a la formación de los alumnos como usuarios de la cultura escrita, favorece el logro de los estándares nacionales de la habilidad lectora. Materiales audiovisuales, generan un entorno variado a partir de los cuales los estudiantes crean su propio aprendizaje. Asimismo, se incluyen los recursos educativos informáticos, los cuáles se pueden utilizar fuera y dentro del aula mediante portales educativos.

7. La evaluación es importante para aprender

El docente es el encargado de la evaluación de los aprendizajes de los alumnos y quien realiza el seguimiento, crea oportunidades de aprendizaje y hace modificaciones en su práctica para que ellos logren los aprendizajes establecidos en el Plan y los programas de estudio.

La evaluación de los aprendizajes es el proceso que permite obtener evidencias, elaborar juicios y brindar retroalimentación sobre los logros de aprendizaje de los alumnos a lo largo de su formación; por tanto, es parte constitutiva de la enseñanza y del aprendizaje.

Las competencias que el alumno desarrollará a lo largo de la educación básica son:

Competencias para el aprendizaje permanente
Mediante la habilidad lectora; el alumno se integrará a la cultura escrita, podrá comunicarse en más de una lengua, hará uso de las habilidades digitales y aprenderá a aprender.

Competencias para el manejo de la información
El alumno seleccionará, organizará y sistematizará la información a fin de que la analice de manera crítica, la utilice y comparta con sentido ético.

Competencias para el manejo de situaciones
En distintas condiciones, el alumno planteará y llevará a buen término distintos procedimientos, tanto a nivel personal como escolar.

Competencias para la convivencia
A través de la relación con otros, el alumno aprenderá a convivir armónicamente, además de valorar la diversidad social, cultural y lingüística.

Competencias para la vida en sociedad
El alumno actúa con juicio crítico y con valores, tomando en cuenta las implicaciones sociales y adquiriendo una conciencia de pertenencia cultural en nuestro país y en el mundo.

Y específicamente para la asignatura de Matemáticas 3, el alumno desarrollará las siguientes competencias:

Resolver problemas de manera autónoma. Los alumnos identifican, plantean y resuelven problemas o situaciones de diferentes tipos.

Comunicar información matemática. Los alumnos expresan, representan y sistematizan información matemática.

Validar procedimientos y resultados. Los alumnos adquieren confianza para explicar y justificar sus procedimientos y soluciones mediante argumentos a su alcance.

Manejar técnicas eficientemente. Mediante el uso de procedimientos y formas de representación, los alumnos efectúan cálculos.

Otro de los puntos esenciales de la RIEB 2011, es la inclusión de cuatro campos formativos, los cuales son:

CAMPOS FORMATIVOS

1. Lenguaje y comunicación

Desarrollo de competencias comunicativas: hablar, escuchar, interactuar con otros.

- Identificar problemas y solucionarlos.
- Comprender, interpretar y producir diversos tipos de textos, transformarlos y crear nuevos géneros y formatos.
- Reflexionar acerca de ideas y textos.

2. Pensamiento matemático

Se busca que los alumnos sean responsables de construir nuevos conocimientos a partir de los saberes previos, esto implica:

- Formular y validar conjeturas.
- Plantearse nuevas preguntas.
- Comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución.
- Buscar argumentos para validar.
- Encontrar diferentes formas de resolución de problemas.
- Manejar técnicas de manera eficiente.

3. Desarrollo personal y para la convivencia

La finalidad es que los alumnos aprendan a actuar con juicio crítico a favor de la democracia, la libertad, la paz, el respeto a las personas, a la legalidad y a los derechos humanos.

Implica también manejar armónicamente las relaciones personales y afectivas para construir identidad y conciencia social.

4. Exploración y comprensión del mundo natural y social

La premisa es la integración de experiencias con el fin de observar con atención objetos, animales y plantas; reconocer sus características, formular preguntas y experimentar, explorar de manera organizada y metódica el mundo natural y social.

La asignatura de Matemáticas 3 se incluye en el segundo campo formativo, es decir, el de pensamiento matemático.

Enfoque de la asignatura Matemáticas 3

La asignatura de Matemáticas 3, en esta nueva propuesta de la RIEB 2011, incluye propósitos por cada nivel escolar, se introducen los Estándares curriculares (los cuales se explicaron en páginas anteriores), se agregan desafíos que sean cognitivamente estimulantes para los alumnos, además de que se reestructuran los temas, quedando la modalidad de trabajo de la siguiente forma:

Eje temático

Temas

Contenido

Ejes temáticos

Recuerde que son sólo tres los ejes temáticos y que en cada bloque se realizan actividades de cada uno de ellos: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma espacio y medida y manejo de la información. Cada uno se identifica con un color diferente, constante a lo largo de la obra.

Cada eje temático tiene un propósito y conviene tenerlo presente para dar mayor sentido a las actividades que realizarán los estudiantes. Dicho propósito será congruente con lo que se espera del alumno:

- Con el eje del sentido numérico y pensamiento algebraico se pretende que los alumnos profundicen en el estudio del álgebra con los tres usos, conceptualmente distintos, de las literales: como número general, como incógnita y en relación funcional.
- Observe que en las actividades correspondientes a este eje los estudiantes vayan alcanzando la generalización de las propiedades de los números y sus operaciones.
- Mediante las actividades correspondientes al eje de forma, espacio y medida favorezca que los estudiantes desarrollen la competencia de argumentación.
- Por ejemplo, al construir, reproducir o copiar una figura, pídales que argumenten las razones por las cuales es válido efectuar cierto trazo realizado; asimismo, observe que el estudiante se dé cuenta de lo conveniente que resulta utilizar instrumentos de geometría y saber manejarlos adecuadamente, para que infiera la importancia de la precisión y lo objetivo que resulta tener un apoyo gráfico.
- En el eje de manejo de la información propicie que los alumnos se acostumbren a analizar datos provenientes de distintas fuentes, a organizarlos, representarlos e interpretarlos.
- Las actividades de este eje se apoyan en nociones tales como el porcentaje, la variación proporcional, la probabilidad y, en general, el significado de los números enteros, fraccionarios y decimales en diferentes contextos. Con el fin de consolidar estos conceptos, permita que los estudiantes propongan o inventen problemas que se resuelvan mediante algunos de estos temas y que formen parte de su vida cotidiana y de su entorno.

Tema

Cada uno de los ejes temáticos contiene temas que indican el contenido general que se tratará en el transcurso del correspondiente apartado.

De tal manera que para el nivel secundaria, la asignatura de Matemáticas 3, queda de la siguiente forma:

Matemáticas

EJES → TEMAS

- **Sentido numérico y pensamiento algebraico**
  - Números y sistemas de numeración
  - Problemas aditivos
  - Problemas multiplicativos
  - Patrones y ecuaciones
- **Forma, espacio y medida**
  - Figuras y cuerpos
  - Medida
- **Manejo de la información**
  - Proporcionalidad y funciones
  - Nociones de probabilidad
  - Análisis y representación de datos

Dentro de este enfoque se manejan los tres ejes que se relacionan con el contenido de la asignatura, sin embargo, un cuarto eje (Actitudes hacia el estudio de las matemáticas), persiste a lo largo de toda la educación secundaria, además de que se generan a partir del estudio de las matemáticas.

Trabajo en el aula por secuencias didácticas

Una de las formas en las que el docente contribuye para que el alumno logre los Aprendizajes esperados y desarrolle las competencias, es mediante la planeación del proceso de enseñanza. Así es que antes de explicar qué son las secuencias didácticas, es indispensable hablar de qué implica la planeación de este proceso.

Para poder diseñar una planificación hay que considerar:

Que los estudiantes aprenderán durante toda su vida y, por tanto, deben involucrarse en su proceso de aprendizaje.

Las estrategias didácticas que se elijan deben provocar la movilización de saberes, así como la evaluación congruente de los Aprendizajes esperados.

Utilizar los Aprendizajes esperados como un referente para la planeación.

La generación de ambientes de aprendizaje, para que de manera colaborativa el estudiante se nutra a partir de experiencias significativas.

Las evidencias de desempeño, de tal forma que brinden información al maestro para la toma de decisiones y así continuar motivando el aprendizaje en el estudiante.

Las secuencias didácticas en este caso, son una herramienta útil para la planificación, ya que son pequeños ciclos de enseñanza y aprendizaje, formadas a partir de un conjunto de actividades articuladas y dirigidas con un propósito en particular. Así pues, una secuencia didáctica permite que los alumnos entiendan y sistematicen los contenidos a fin de hilvanar los Aprendizajes esperados, las competencias y los Estándares curriculares de Matemáticas 3, para su desarrollo.

Una secuencia didáctica se conforma de tres momentos:

Inicio. En esta fase se plantean los propósitos que se trabajarán; se contextualizará al alumno para motivarlo y se diseñarán situaciones problémicas. En este momento también se indaga sobre los conocimientos previos de los estudiantes y se incluye una pregunta detonadora, la cual dará pauta al inicio del tema a revisar.

→

Desarrollo. Durante esta fase se exponen actividades que permitirán la movilización y el incremento de conocimientos, habilidades y actitudes para el logro de los Aprendizajes esperados.

→

Cierre. En esta fase final de la secuencia didáctica, se da un cierre y se valoran los Aprendizajes esperados a través de los Estándares curriculares.

Un ejemplo de secuencia didáctica es el siguiente:

<table>
<tr><td>Asignatura: Matemáticas 3</td><td>Número de sesiones: 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico</td></tr>
<tr><td>Tema:Patrones y ecuaciones</td><td>Contenido: Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje esperado: Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.</td><td>Competencias: Resolver problemas de manera autónoma.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estándar curricular: Resuelve problemas que involucran el uso de las ecuaciones lineales o cuadráticas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inicio de la secuencia didáctica:

Intención pedagógica: Que los estudiantes recuperen sus conocimientos previos sobre el tema.

Comenzar ejemplificando al alumno sobre el uso de las ecuaciones cuadráticas sencillas en la vida cotidiana. Uno de estos casos es cuando se desea calcular la trayectoria que seguirá una pelota después de ser lanzada. Al terminar esta introducción, se solicitará a los estudiantes que realicen la evaluación diagnóstica del tema, que se encuentra en la página 16, en la sección Acuérdate de...

Después de que haya contestado la sección Acuérdate de..., comentar con el grupo los resultados obtenidos y enfatizar sobre los conocimientos, procedimientos y actitudes que el alumno aprenderá en esta lección.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desarrollo de la secuencia didáctica:

Intención pedagógica: Que los alumnos relacionen sus conocimientos, habilidades y actitudes previos con los adquiridos, para resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, haciendo uso de procedimientos personas u operaciones inversas.

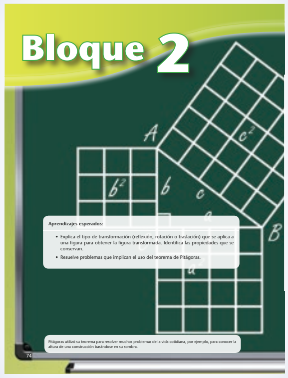
En esta fase el alumno de manera individual, parejas, equipo o grupal; realizará los ejercicios de la sección Practícalo, en las páginas 17 a la 21. Dependiendo de la actividad hay que enfatizar lo siguiente:
• Actividad 1.1. Cálculo de la raíz cuadrada por el método del algoritmo.
• Actividad 1.2. Elaboración de una expresión algebraica.
• Actividad 1.3. Comprobación de resultados de ecuaciones.
• Actividad 1.4. Ecuaciones cuadráticas incompletas.
• Actividad 1.5. Planteamiento de problemas haciendo uso de una ecuación cuadrática.
• Actividad 1.6. Procedimiento para encontrar la solución a una situación dada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cierre de la secuencia didáctica:

Intención pedagógica: Que los alumnos valoren su aprendizaje esperado, mediante los estándares curriculares.

Con esta fase se finaliza la secuencia didáctica, por lo que la sección Lo que aprendí de la página 22, permitirá valorar los conocimientos, habilidades y actitudes del alumno, además de comprobar el logro del aprendizaje esperado a través del estándar curricular. Después de pedir al estudiante que conteste esta sección, hay que verificar los resultados obtenidos, asimismo hay que preguntar al alumno qué parte del ejercicio se le dificultó más y en caso de ser así, encontrar la razón de por qué no obtuvo el resultado correcto.</td></tr>
</table>

Uso del libro del alumno

El libro del alumno tiene una estructura didáctica bien organizada, ya que a través de diversas secciones se va introduciendo al alumno en una serie de actividades que le permiten ir participando y aportando de manera directa información que complementa los temas del programa y que es muy necesaria para lograr los Aprendizajes esperados. Las diferentes secciones y la forma en la que deben de manejarse se describen a continuación.



Entrada de bloque

Al inicio de cada bloque se presentan los Aprendizajes esperados y una línea del tiempo.

Aprendizajes esperados

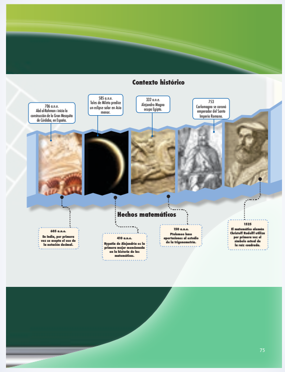
Analice con los alumnos los Aprendizajes esperados, pues son el referente específico que indica hacia dónde están orientadas las actividades que realizarán en cada bloque; además se resalta la información del tema y los contenidos que incluyen y que deberán tratarse.

A manera de sugerencia, le proponemos:

- Al inicio de cada bloque, organice a los alumnos por equipos para que copien los Aprendizajes esperados en una cartulina que puedan pegar en una de las paredes del salón de clases. La intención pedagógica es que los alumnos tengan presente qué lograrán al término de cada bloque.
- Sugiera a los alumnos, como una forma de autoevaluación, que copien los Aprendizajes esperados en su cuaderno, en una tabla, como la siguiente:

Aprendizaje esperado	Puedo hacerlo satisfactoriamente	Tengo dificultades para resolverlo	Necesito ayuda para resolverlo
Explica la diferencia entre eventos complementarios.			
Explica la diferencia entre eventos mutuamente excluyentes.			
Explica la diferencia entre eventos independientes.			

A medida que avancen en el desarrollo de los temas, pida que la completen, colocando una ✔ dentro de la casilla que describa mejor el aprendizaje del estudiante. Esto puede servir para organizar grupos de estudio en los temas que requieran de un mayor tratamiento.



Línea del tiempo

Las matemáticas son una forma más que la sociedad ha utilizado para resolver problemas. La línea del tiempo, al inicio de cada bloque, tiene la intención de mostrar el contexto histórico en que han surgido los acontecimientos más relevantes en el mundo de las matemáticas.

Para trabajar con ella le sugerimos lo siguiente:

- Utilice este recurso didáctico para que los alumnos lleven a cabo prácticas de cálculo mental; recuerde que, al iniciar un día de trabajo escolar, el esfuerzo y la agilidad mental que produce esta ejercitación constituye una preparación excelente para cualquier individuo; la gimnasia mental es formativa, tanto desde el punto de vista intelectual (dominio de las relaciones numéricas, movilización de conocimientos previos, capacidad para analizar, comparar y combinar) como del psicológico (concentración de la atención, esfuerzo de la memoria y originalidad en la resolución de problemas).
- Al trabajar en el desarrollo del cálculo mental éste no debe apreciarse como un simple cálculo mecánico, sino considerarse como un cálculo reflexivo, mediante el cual cada alumno tiene una nueva oportunidad de validar sus procedimientos para alcanzar buenos resultados y mostrar su originalidad y agilidad mental en el cálculo.

  Por ejemplo: pida que observen la línea del tiempo en la entrada del bloque 1, en donde se hace referencia a hechos matemáticos que según los historiadores se calcula que ésta data aproximadamente del año 5000 a.C.

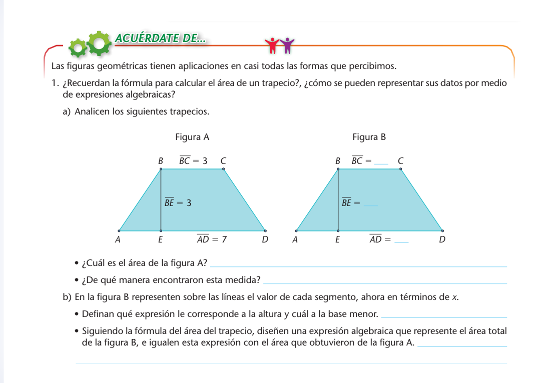
  Podría entonces preguntar a los alumnos: ¿qué hecho histórico te llamó más la atención?, ¿cuántos años han pasado de ese hecho hasta la actualidad? Tome en cuenta que, como no hay precisión en el año, se pueden utilizar como unidades de medida los siglos; tome en cuenta que los alumnos ya tienen conocimiento de los números con signo, por lo tanto será aceptable que utilicen esos números al dar su respuesta o bien lo hagan en término de a.C. o d.C. Ésta es una buena oportunidad para percibir cómo operan con estas cantidades.

  Ésta es una buena oportunidad para percibir que hay cantidades al otro lado del cero y observar cómo operan con estas cantidades.

- Aproveche también los demás datos que se ofrecen en la línea del tiempo para formular otras preguntas y vincular la información con otras asignaturas; por ejemplo: ¿cuántos años transcurrieron entre las primeras industrias del metal y la construcción de las pirámides de Gizeh en Egipto?, ¿qué aportaciones hizo la cultura egipcia al campo de las matemáticas?, ¿en qué continente se encuentra Egipto?, ¿consideran que la construcción de las pirámides requirió de conocimientos matemáticos?, ¿por qué lo consideran así?, etcétera.
- En la medida en que los alumnos adviertan que el desarrollo de las matemáticas no es exclusivo de una región, tendrán mejores elementos para corroborar que en él la sociedad desempeña un papel muy importante.
- Si las condiciones son propicias, pida a los estudiantes que investiguen hechos históricos mencionados en las líneas del tiempo, así como el contexto histórico en el que se desarrollaron, sus aportaciones en el campo de las matemáticas, alguna anécdota, etcétera. Luego se seleccionarán algunos trabajos y se comentarán en el grupo, con la posibilidad de enriquecer la información con las aportaciones de los alumnos que escuchen la exposición.

Acuérdate de…

El propósito de esta sección es que el alumno recupere sus conocimientos y habilidades adquiridos; no se trata de hacer un repaso, más bien se pretende verificar el nivel de aprendizaje del estudiante y cuál es su potencial para profundizar o acceder a los nuevos contenidos, independientemente de la parte motivante que le corresponde como introducción y de la que busca conectarlo con los contenidos previos.



ACUÉRDATE DE...

Las figuras geométricas tienen aplicaciones en casi todas las formas que percibimos.

1. ¿Recuerdan la fórmula para calcular el área de un trapecio?, ¿cómo se pueden representar sus datos por medio de expresiones algebraicas?

   a) Analicen los siguientes trapecios.

   - ¿Cuál es el área de la figura A? ______
   - ¿De qué manera encontraron esta medida? ______

   b) En la figura B representen sobre las líneas el valor de cada segmento, ahora en términos de x.

   - Definan qué expresión le corresponde a la altura y cuál a la base menor. ______
   - Siguiendo la fórmula del área del trapecio, diseñen una expresión algebraica que represente el área total de la figura B, e igualen esta expresión con el área que obtuvieron de la figura A. ______

Con frecuencia se propone que los alumnos realicen la actividad en equipo para fomentar el desarrollo del trabajo colaborativo. Las situaciones que se plantean parten de lo más sencillo, tratando de propiciar la participación de todos los estudiantes, para que mediante el intercambio de ideas y procedimientos se construyan nuevos conocimientos.

Precisamente, la metodología didáctica sugerida para los nuevos programas consiste en llevar al aula actividades que motiven a los alumnos a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen sus resultados.

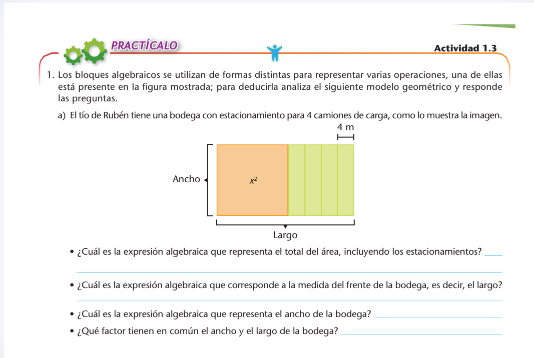
Mediante las actividades previas se busca entonces que los alumnos entren en la situación correspondiente al apartado en cuestión; el desafío consiste en rescatar lo que ya saben hacer, para que estén en mejores condiciones de aprovechar las nuevas experiencias y reestructuren lo que ya saben, lo modifiquen o amplíen, y rechacen o ratifiquen que la forma en la que aplican sus conocimientos es eficaz.

Al trabajar en esta sección, le sugerimos:

- Dé el tiempo suficiente para resolverla; la participación de los alumnos es fundamental para el buen aprendizaje. Para apoyar su creatividad, pídales que modifiquen la representación de sus resultados y que expongan sus argumentos.
- Propicie la participación de los alumnos, para que se den cuenta de que los problemas no son ajenos a ellos.
- Aproveche estas actividades para obtener un diagnóstico del grado de conocimientos y habilidades del grupo.

Practícalo

En esta sección se incluyen **actividades** para que los estudiantes resuelvan, propongan y adquieran seguridad en sus procedimientos, además de que vayan alcanzando autonomía y desarrollen la competencia del manejo de técnicas.



PRACTÍCALO

Actividad 1.3

1. Los bloques algebraicos se utilizan de formas distintas para representar varias operaciones, una de ellas está presente en la figura mostrada; para deducirla analiza el siguiente modelo geométrico y responde las preguntas.

   a) El tío de Rubén tiene una bodega con estacionamiento para 4 camiones de carga, como lo muestra la imagen.

   - ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el total del área, incluyendo los estacionamientos? ______
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la medida del frente de la bodega, es decir, el largo? ______
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el ancho de la bodega? ______
   - ¿Qué factor tienen en común el ancho y el largo de la bodega? ______

Como parte medular del libro le sugerimos:

- En algunas actividades se incluyó una gran cantidad de ejercicios; la finalidad es que, mediante la reflexión y la ejercitación en la resolución, los alumnos alcancen la automatización, muy diferente a la simple mecanización.
- No es necesario que los alumnos resuelvan todas y cada una de las operaciones; si a su juicio los estudiantes ya tienen cierto dominio en el manejo de técnicas operatorias, puede pedir que sólo resuelvan cierta cantidad de operaciones, o bien que resuelvan específicamente algunas operaciones que usted haya seleccionado.
- Si no terminan algunas actividades en clase, permítales que las concluyan en casa y estimule la dedicación que le brinden a la actividad.
- Si la organización del grupo lo permite, propicie la mayor participación de los equipos en el desarrollo de las actividades; éstas permiten la socialización de procedimientos en la búsqueda de soluciones.

- La socialización dará a los estudiantes mayores oportunidades de validar sus procedimientos y adquirir seguridad en la resolución de problemas.

De manera particular, en el manejo de algunos contenidos, también le sugerimos:

- Para que el estudiante cuente con más herramientas intelectuales es apropiado que también desarrolle la habilidad de estimación; desde el Bloque 1 se ofrece una oportunidad de trabajar en este sentido, promueva la participación del grupo para observar el desarrollo de esta habilidad y, si es posible, pídales que propongan cantidades.
- Ponga especial atención en la resolución de las actividades en las que se emplean fracciones comunes, ya que éstas permitirán a los alumnos el desarrollo de nociones útiles para comprender mejor contenidos más avanzados, como el razonamiento proporcional y las fracciones algebraicas.

Aun cuando las relaciones de proporcionalidad se han venido trabajando desde la primaria, es importante reforzar los conceptos de razón, proporción y el cálculo del valor faltante en una expresión para que pueda obtenerse la proporción.

- Al desarrollar las actividades de este apartado, observe que los alumnos muestren en sus participaciones que están entendiendo el concepto de proporción; si fuera necesario, pida que al ir resolviendo cada inciso argumenten por qué consideran correcto el resultado que presentan.

Con el propósito de consolidar el concepto de proporcionalidad, permita que también los estudiantes propongan o inventen problemas que se resuelvan mediante proporciones.

- Las actividades relacionadas con el significado y uso de las literales permiten en el estudiante el desarrollo de la habilidad de flexibilidad de pensamiento, lo importante en este tipo de actividades es la posibilidad de que los alumnos encuentren las expresiones algebraicas que mejor entiendan, que puedan comunicarlas, que expliquen cómo las obtuvieron y que las validen.
- Al resolver actividades que involucran unidades de medida (por ejemplo, en el cálculo de perímetros y áreas), observe que las respuestas de los estudiantes incluyan las unidades de medida correspondientes.

Conforme vaya cerrando el tratamiento de algunos contenidos, pida a los alumnos que lean al grupo sus conclusiones.

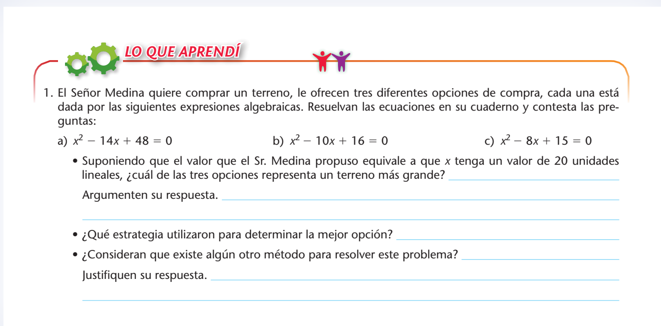
- Aproveche la resolución de problemas para que los estudiantes difundan sus procedimientos, los validen y adquieran confianza; recuerde que cuando el grupo aprende a escuchar otras formas de resolver va desarrollando la habilidad de flexibilidad de pensamiento, evalúa sus propios procedimientos, aprende a poner atención y a escuchar.

Lo que aprendí

En esta sección se pretende que los estudiantes muestren de manera más puntual el tipo de habilidades intelectuales que están desarrollando.

Como parte final del trabajo del bloque tenga presente que:

- Las competencias matemáticas requieren de varios componentes, y uno de ellos es precisamente el de las habilidades matemáticas.
- Observe cómo las actividades del libro darán a los estudiantes otras formas para consolidar sus propios procedimientos de resolución de problemas.


LO QUE APRENDÍ

1. El Señor Medina quiere comprar un terreno, le ofrecen tres diferentes opciones de compra, cada una está dada por las siguientes expresiones algebraicas. Resuelvan las ecuaciones en su cuaderno y contesta las preguntas:

   a) $x^2 - 14x + 48 = 0$ b) $x^2 - 10x + 16 = 0$ c) $x^2 - 8x + 15 = 0$

   - Suponiendo que el valor que el Sr. Medina propuso equivale a que x tenga un valor de 20 unidades lineales, ¿cuál de las tres opciones representa un terreno más grande? ______

     Argumenten su respuesta. ______
   - ¿Qué estrategia utilizaron para determinar la mejor opción? ______
   - ¿Consideran que existe algún otro método para resolver este problema? ______

     Justifiquen su respuesta. ______

Desarrolla tus habilidades

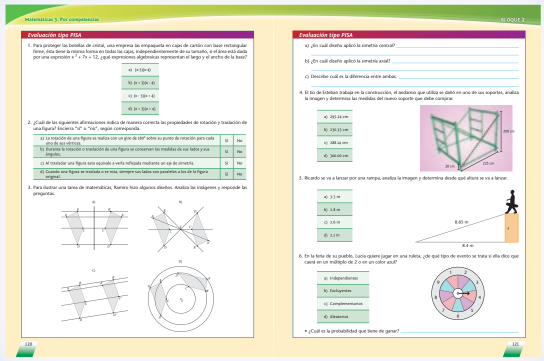
Esta sección es otra oportunidad para que los estudiantes reflexionen acerca del tema que están estudiando y las actividades puedan adquirir mayor sentido.

Cuando se trabaje con este recurso le sugerimos:

> **Desarrolla tus habilidades**
>
> A partir de las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado es posible reconstruir una expresión cuadrática. Recuerda que las raíces provienen de obtener dos binomios y éstos a su vez provienen de la factorización de una ecuación cuadrática.
>
> 1. Encuentra la factorización (binomios con término común) y posteriormente la ecuación de segundo grado original en su forma general, es decir, $ax^2 + bx + c = 0$ para las siguientes raíces o soluciones.
>
>   a) $x_1 = 5x_2 = 7$ b) $x_1 = 3x_2 = 1$ c) $x_1 = \frac{1}{3}x_2 = -3$
>
> 2. Explica el procedimiento que llevaste a cabo y comprueba tus resultados. Con la ayuda del profesor determina cuál es la utilidad de saber reconstruir una ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones y en qué te puede servir esto en la vida cotidiana.

- Potencie las preguntas para que los estudiantes desarrollen la habilidad del pensamiento lógico matemático.
- Aproveche esta sección para escuchar cómo argumentan las respuestas. Por ejemplo, al utilizar numeración con bases diferentes (dos, tres, cuatro) establezca junto con los alumnos la tabla de valores, a partir de la idea del principio de posición, la importancia del cero y el hecho de que la base es el indicador y no un símbolo más.
- Aproveche también esta sección para reforzar la autoestima de los estudiantes, pues brinda la oportunidad para el desarrollo de la argumentación y de la creatividad.
- Enriquezca esta sección con sus aportaciones y las de sus alumnos. Si es posible, incluya situaciones, como algunos juegos o algunos acertijos que no requieran de gran elaboración o de conocimientos que el alumno no haya tratado en otro momento.

Evaluación

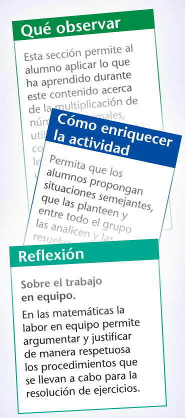


Esta sección, de final de bloque, tiene la intención de alcanzar la evaluación de los conocimientos y habilidades alcanzadas por el alumno; esto significa que cuando los estudiantes resuelven identifican los temas que más trabajo les cuestan, y a través de esta valoración saben qué temas o contenidos requieren de mayor desempeño; es también una oportunidad para que el docente sepa en qué temas se requiere poner más empeño para que los alumnos alcancen el aprendizaje; como docente, también esta sección debe permitir identificar aquellos temas en los cuales el grupo requiere de mayor atención o tiempo para la consolidación de aprendizajes.

Cabe destacar que en el apartado de Evaluación, a partir de la prueba PISA, se profundizará más sobre esta evaluación, ya que el formato que guarda en su estructura, obedece a este tipo de valoración.

En cada una de estas secciones pertenecientes al libro del alumno (Acuérdate de…, Practícalo, Lo que aprendí, Desarrolla tus habilidades y Evaluación), se han agregado otras cápsulas, a fin de brindar al profesor, recursos para aprovechar al máximo estas actividades. Las cápsulas son:

- **Qué observar**, a lo largo del libro, y como parte de las sugerencias didácticas, hemos incluido la sección, en la cual destacamos algunas cuestiones que es importante que considere para el desarrollo del tema.
- **Como enriquecer la actividad**, como parte de las sugerencias didácticas, hemos incluido la sección; en ella le proponemos otras acciones concretas que le sirvan de referencia para el trabajo de cada uno de los contenidos tratados en el libro.
- **Reflexión**, como parte de las sugerencias didácticas, hemos incluido la sección en la que tratamos algunas cuestiones relacionadas con los contenidos actitudinales y con la transversalidad de la asignatura con algunas otras.



Sin embargo, a lo largo de las propuestas didácticas también se podrá sugerir el trabajo con otras asignaturas, para vincular el contenido que se está trabajando, con el fin de que el estudiante tenga una visión más amplia en su trabajo.

Por otro lado, también se invita que el profesor, haciendo uso de su creatividad y experiencia, genere otros ambientes donde el alumno pueda vincular el contenido de la asignatura de Matemáticas con el de otras. Así pues hay que considerar la relación con otras áreas, como Física, Química, Geografía, etcétera.

Por ejemplo: una forma para que el alumno comprenda la modelación puede ser la de relacionar expresiones algebraicas con figuras geométricas, lo cual lo llevará a modelar situaciones y obtener expresiones de carácter general, como en: "Encontrar la fórmula que te permita calcular el perímetro del siguiente polígono".

Para la mayoría de los alumnos no resultará muy complejo hallar la fórmula solicitada y a partir de ello se le está involucrando en temas como:

- Perímetro de un polígono.
- Modelación.
- Reducción de términos semejantes.

Otras secciones en el libro del alumno son:

Para tener en cuenta

En esta sección se consolidan los conceptos claves que permitirán al alumno comprender los temas que se están tratando.

Para tener en cuenta

Los poliedros y los cuerpos de revolución son cuerpos con volumen, sin embargo, son distintos entre sí, la principal diferencia es que un poliedro está constituido por caras planas y un sólido de revolución tiene una o varias caras curvas.

Es importante que:

- Motive al alumno que lo consulte las veces que lo requiere, para repasar la forma en la que puede llevar a cabo los procedimientos de una situación dada, hasta que por sí mismo pueda aplicar estos conocimientos y habilidades a distintos casos planteados.
- También puede solicitarle que en su cuaderno escriba e investigue aquellos puntos de esta sección que no le hayan quedado claros.
- Motive al alumno para que de manera individual o en equipo, exponga ante el resto del grupo los datos obtenidos de la investigación, a fin de que desarrolle sus habilidades verbales y contribuya a la adquisición de conocimientos del resto de sus compañeros.

Para leer más

Para trabajar esta sección le sugerimos:

Para leer más

Cuando se realiza la traslación de una figura en cualquier sentido, se forman líneas paralelas entre los vértices que son correspondientes y siempre son de la misma longitud.

En una traslación no cambia la posición de la figura, es decir, sólo se cambia de lugar, no se rota ni se obtiene una figura simétrica.

- Pida a algún alumno que la lea y se comente con todo el grupo lo que la nota quiere decir.
- Si se requiere una explicación más amplia, trate de no repetir la información; lo más conveniente es servirse de diversos ejemplos y que sean los propios alumnos quienes interpreten la información, claro, orientados por su conocimiento y evitando que falten a la realidad conceptual o procedimental, según sea el caso.
- Pida a los alumnos que registren en tarjetas de trabajo la información proporcionada, así como los comentarios hechos al respecto. Esto les permitirá poner en práctica el análisis y síntesis de ideas.
- Motive a los alumnos a investigar otro tipo de información relacionada con el tema y que la compartan con el grupo. A lo largo del libro, y como parte de las sugerencias didácticas, hemos incluido la sección Curiosidades, acertijos y más, que puede servir como modelo.

Asimismo, dentro de las sugerencias didácticas se incluye la sección de:

- **Curiosidades, acertijos y más**, donde se plantean situaciones y anécdotas interesantes aplicadas a las matemáticas.

Usa las TIC

Las actividades complementarias contienen referencias de actividades adicionales que se realizarán por medio de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y que pueden reforzar los contenidos tratados.

A lo largo del libro, y como parte de las sugerencias didácticas, hemos incluido la sección:

- **Recursos y materiales**, aquí hemos referido algunas sugerencias de materiales y páginas de Internet en las que los alumnos pueden ampliar el trabajo del contenido estudiado en clase.

USA LAS TIC

En la siguiente página electrónica http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b01_t07_s01_interactivo/index.html (Consultada el día 24 de octubre de 2012, a las 11:13 horas), encontrarás un programa interactivo que te permitirá representar datos en una gráfica. Realiza los ejercicios y comenta tus resultados con tus compañeros, si es posible auxíliate para comparar las gráficas que elaboraste en este contenido.

Glosario

Con frecuencia se ofrece la definición de aquellas palabras que pudieran presentar alguna dificultad porque se desconozca su significado.

Al encontrar en la lectura este recurso le sugerimos:

- Mencionarlas cuantas veces sea necesario, ya que en la medida en la que se utilicen de manera natural los estudiantes podrán apropiarse del lenguaje específico de la asignatura.

Glosario

Cono Truncado. Es un sólido que se forma al girar un trapecio rectángulo sobre el lado que tiene en sus extremos los ángulos rectos. Semeja el "corte" realizado en un cono de forma paralela a su base.

De manera adicional, al término de cada página se incluye la sección de "**Bitácora pedagógica**", el cual es un espacio donde el profesor podrá llevar un registro de cada una de las sesiones que tenga con sus alumnos. Este tipo de información es muy útil para recabar datos sobre los avances y elementos por profundizar en el aprendizaje de los estudiantes.

Evaluación a partir de la prueba PISA

Cuando el aprendizaje se evalúa, deben considerarse un conjunto de acciones a fin de recabar la información necesaria que permita apoyar las decisiones que se toman en relación a las situaciones didácticas, el plan de acción dentro el aula, el empleo de materiales, entre otros. Asimismo, la evaluación provee información sobre el grado de avance que cada alumno tiene en diferentes etapas del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Como se ha remarcado a lo largo de estas páginas, algo fundamental en el enfoque que plantea la RIEB 2011, es la evaluación de los Aprendizajes esperados y las competencias, a través de los Estándares curriculares, y la prueba PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE, por sus siglas en inglés) ofrece los elementos necesarios para tal fin, es decir, permite conocer el nivel de desempeño de los alumnos ya que evalúa algunos de los conocimientos y habilidades necesarios que deben tener para desempeñarse de forma competente en la sociedad del conocimiento.

La prueba PISA se ha convertido en un consenso mundial educativo que perfila las sociedades contemporáneas a partir de tres campos de desarrollo en la persona: la lectura como habilidad superior, el pensamiento abstracto como base del pensamiento complejo, y el conocimiento objetivo del entorno como sustento de la interpretación de la realidad científica y social.

Los Estándares curriculares, como ya se describió, expresan lo que los alumnos deben saber y ser capaces de hacer en los cuatro periodos escolares: al concluir el preescolar; al finalizar el tercer grado de primaria; al término de la primaria (sexto grado), y al concluir la educación secundaria. Cabe mencionar que cada conjunto de estándares, correspondiente a cada periodo, refleja también el currículo de los grados escolares que le preceden.

Los niveles de desempeño que contempla la prueba PISA para matemáticas son:

Nivel 6	• Los alumnos que alcanzan este nivel son capaces de formar conceptos, generalizar y utilizar información a partir de investigaciones y modelos de situaciones problémicas complejas. Posee un pensamiento y razonamiento matemático avanzado, además de desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas.
Nivel 5	• Los adolescentes, cuando logran este nivel, son capaces de formar conceptos, generalizar y utilizar información a partir de investigaciones y modelos de contextos complejos. Formulan y comunican con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus hallazgos, y a su adecuación a las situaciones originales.
Nivel 4	• Los estudiantes trabajan con eficacia los modelos matemáticos en situaciones complejas y concretas, utilizan habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones y acciones.
Nivel 3	• Los alumnos realizan procedimientos descritos con claridad, incluso los que se relacionan con decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Saben interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Pueden elaborar escritos breves exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
Nivel 2	• Los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Saben extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un único modelo de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, convenciones o procedimientos elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
Nivel 1	• Los estudiantes saben responder a preguntas relacionadas con contextos familiares, en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.
Por debajo del Nivel 1	• Los estudiantes cuyo desempeño se sitúa por debajo del nivel 1 son incapaces de tener éxito en las tareas más básicas que busca medir PISA.

Fuente: http://www.pisa.sep.gob.mx/
Fecha de consulta: 18 de junio de 2012.

Como se señaló anteriormente, en las evaluaciones tipo PISA que se incluyen al final de cada bloque, se contempla la estructura de esta prueba, a fin de que el alumno pueda aplicar sus competencias y Aprendizajes esperados a partir de los Estándares curriculares.

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
						1	2
	3	4	5	6	7	8	9
	10	11 Consejo técnico escolar	12 Consejo técnico escolar	13 Consejo técnico escolar	14 Consejo técnico escolar	15 Consejo técnico escolar	16
Semana 1 Semana de evaluación de inducción y evaluación exploratoria	17	18 **Inicio de curso**	19	20	21	22	23
Semana 2 **Bloque 1** Contenido 1	24/31	25	26	27	28	29	30

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
Semana 3 **Bloque 1** Contenido 1		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Semana 4 **Bloque 1** Contenido 2	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Semana 5 **Bloque 1** Contenido 3	**14**	**15** Suspensión de labores docentes	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Semana 6 **Bloque 1** Contenido 3	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26** Consejo técnico escolar	**27**
Semana 7 **Bloque 1** Contenido 4	**28**	**29**	30				

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
Semana 7 **Bloque 1** Contenido 4				1	2	3	4
Semana 8 **Bloque 1** Contenido 5	5	6	7	8	9	10	11
Semana 9 **Bloque 1** Contenido 6	12	13	14	15	16	17	18
Semana 10 **Bloque 1** Contenido 7	19	20	21	22	23	24	25
Semana 11 **Bloque 1** Evaluación parcial	26	27	28	29	30	31 Consejo técnico escolar	

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
Semana 11							**1**
Semana 12 **Bloque 2** Contenido 1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Semana 13 **Bloque 2** Contenido 2	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Semana 14 **Bloque 2** Contenido 2	**16**	**17** Suspensión de labores docentes	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
Semana 15 **Bloque 2** Contenido 3	**23/30**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28** Consejo técnico escolar	**29**

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
Semana 16 **Bloque 2** Contenido 3		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Semana 17 **Bloque 2** Contenido 4	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Semana 18 **Bloque 2** Contenido 5	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
	21	**22** Vacaciones	**23** Vacaciones	**24** Vacaciones	**25** Vacaciones	**26** Vacaciones	**27**
	28	**29** Vacaciones	**30** Vacaciones	**31** Vacaciones			

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
					1 Vacaciones	**2** Vacaciones	**3**
Semana 19 **Bloque 2** Contenido 5	**4**	**5** Vacaciones	**6** Vacaciones	**7**	**8**	**9**	**10**
Semana 20 **Bloque 2** Contenido 6	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
Semana 21 **Bloque 2** Contenido 6	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Semana 22 **Bloque 2** Evaluación parcial	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30** Consejo técnico escolar	**31**

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
Semana 23 **Bloque 3** Contenido 1	1	2 Suspensión de labores docentes	3	4	5	6	7
Semana 24 **Bloque 3** Contenido 2	8	9	10	11	12	13	14
Semana 25 **Bloque 3** Contenido 3	15	16	17	18	19	20	21
Semana 26 **Bloque 3** Contenido 4	22	23	24	25	26	27 Consejo técnico escolar	28

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
Semana 27 **Bloque 3** Contenido 5	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Semana 28 **Bloque 3** Contenido 6	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Semana 29 **Bloque 3** Contenido 7	**15**	**16** Suspensión de labores docentes	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
Semana 30 **Bloque 3** Evaluación parcial	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27** Consejo técnico escolar	**28**
Semana 31 **Bloque 4** Contenido 1	**29**	**30**	**31**				

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
Semana 31 **Bloque 4** Contenido 2				**1**	**2**	**3**	**4**
	5	**6** Vacaciones	**7** Vacaciones	**8** Vacaciones	**9** Vacaciones	**10** Vacaciones	**11**
	12	**13** Vacaciones	**14** Vacaciones	**15** Vacaciones	**16** Vacaciones	**17** Vacaciones	**18**
Semana 32 **Bloque 4** Contenido 3	**19**	**20**	**21**	**22** Semana Nacional de Evaluación	**23**	**24** Consejo técnico escolar	**25**
Semana 33 **Bloque 4** Contenido 4	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**		

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
Semana 33						**1** Suspensión de labores docentes	**2**
Semana 34 **Bloque 4** Contenido 5	**3**	**4**	**5** Suspensión de labores docentes	**6**	**7**	**8**	**9**
Semana 35 **Bloque 4** Contenido 6	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15** Suspensión de labores docentes	**16**
Semana 36 **Bloque 4** Contenido 7	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
Semana 37 **Bloque 4** Evaluación parcial	**24/31**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29** Consejo técnico escolar	**30**

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
Semana 38 **Bloque 5** Contenido 1		1	2	3	4	5	6
Semana 39 **Bloque 5** Contenido 2	7	8	9	10	11	12	13
Semana 40 **Bloque 5** Contenido 3	14	15	16	17	18	19	20
Semana 41 **Bloque 5** Contenido 4	21	22	23	24	25	26 Consejo técnico escolar	27
Semana 42 **Bloque 5** Contenido 5	28	29	30				

	Dom.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sáb.
Semana 42 **Bloque 5** Contenido 5				1	2	3	4
Semana 43 **Bloque 5** Contenido 6	5	6	7	8	9	10	11
Semana 44 **Bloque 5** Tema Repaso y evaluación final	12	13	14	15	16 **Fin de curso**	17 Vacaciones	18
	19	20 Vacaciones	21 Vacaciones	22 Vacaciones	23 Vacaciones	24 Vacaciones	25
	26	27 Vacaciones	28 Vacaciones	29 Vacaciones	30 Vacaciones	31 Vacaciones	

Arriaga • Benítez

Matemáticas 3
por competencias

Matemáticas III
Tercer grado
Educación Secundaria

Datos de catalogación

Autores: Arriaga Robles, Alan,
Marcos Manuel Benítez Castanedo

Matemáticas 3. Por competencias
Tercer grado, educación secundaria
1ª Edición

Pearson Educación, México, 2014
ISBN: 978-607-32-2677-6
Área: Secundaria

Formato: 20.5 x 27cm Páginas: 272

Esta edición en español es la única autorizada.

Matemáticas 3. Por competencias

El proyecto didáctico Matemáticas 3. Por competencias es una obra colectiva creada por encargo de la editorial Pearson Educación de México, por un equipo de profesionales en distintas áreas, que trabajaron siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento pedagógico de Pearson Educación de México.

Especialistas en Matemáticas responsables de los contenidos y su revisión técnico-pedagógica:

Obra original: Arriaga Robles, Alan y Marcos Manuel Benítez Castanedo

Revisor técnico: Jesús Manuel Hernández Soto

Colaboración especial: Sergio Isidoro Alpízar Jiménez y Vicente Zimbrón Jiménez

Dirección general: Philip De La Vega ■ **Dirección K-12:** Santiago Gutiérrez ■ **Gerencia editorial K-12:** Jorge Luis Íñiguez ■ **Coordinación editorial K-9:** Marcela Alois ■ **Coordinación de arte y diseño:** Asbel Ramírez

Dirección K-12 Latinoamérica: Eduardo Guzmán Barros

Dirección de contenidos K-12 Latinoamérica: Clara Andrade

Editado por: EDIMEND, S.A de C.V ■ **Director general:** Francisco Méndez Gutiérrez ■ **Director editorial:** Alberto García Rodríguez ■ **Gerente de contenidos:** Gabriela Ramírez Salgado ■ **Coordinación de contenidos secundaria:** Mariana Calero Sánchez ■ **Coordinación editorial:** Angélica C. Sánchez Celaya ■ **Edición:** Maricela García Núñez ■ **Diseño y formación editorial:** Mario A. Tenorio Murillo, Juliana Porras Maldonado, Susana Meléndez de la Cruz ■ **Corrección de estilo y editorial:** Daniel García Castillo, Iliana Sahagún Angulo, Agustín Cervantes Aguilar ■ **Diseño de portada:** Mónica Huitrón Vargas ■ **Ilustraciones:** Eloy Padilla Puga y Juliana Porras Maldonado ■ **Fotografías:** Beatriz Mendoza Álvarez.

ISBN: 978-607-32-2677-6
ISBN SEP: 978-607-32-2680-6
ISBN E-BOOK: 978-607-32-2678-3
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-2679-0

Impreso en México. *Printed in Mexico*

Atlacomulco 500, 5° piso
Col. Industrial Atoto, C.P. 53519
Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 1031

PEARSON

Presentación

Hoy día, nuestras sociedades modernas se han vuelto más exigentes en todos los ámbitos educativos, sobre todo, se ha dado mayor énfasis al desarrollo de competencias, lo que determina que las habilidades que desarrollen las nuevas generaciones de estudiantes, los capacitarán para tomar decisiones más acertadas en lo que concierne a su crecimiento profesional para enfrentar los retos que significa la adquisición de nuevos conocimientos y tecnologías.

El uso adecuado de la información y el conocimiento que se transmiten a través de textos como el que tienes en tus manos, te permitirá poner en práctica nuevas estrategias que permitan la obtención de más y mejores herramientas del saber, indispensables para continuar contribuyendo en el desarrollo de nuestra sociedad y sus instituciones, así como en el crecimiento de cada individuo interesado en la superación personal mediante el aprendizaje constante.

Es por esta razón que las instituciones educativas juegan un papel importante en la formación de individuos, al imbuir en ellos la seguridad de que son capaces de interactuar en concordancia con las demandas que les plantean las sociedades modernas. Por tanto, las escuelas deben cumplir con esmero los objetivos que se plantean desde el inicio del ciclo escolar: formar alumnos que respondan, con base en sus conocimientos y habilidades, a los retos que la sociedad les plantea constantemente.

La combinación de herramientas como los libros, la escuela y la tecnología permitirá que los alumnos logren alcanzar el mejor de los éxitos en el futuro inmediato. Los libros son una herramienta que se encuentra en primer orden del conocimiento directo, las personas que tienen acceso a éstos suelen desarrollar capacidades, habilidades y actitudes valiosas, además del manejo de teorías y procedimientos.

Este libro tiene por objetivo capacitar al alumno para que proponga diferentes formas de resolver situaciones diversas, así como de justificar y validar sus resultados; pero, principalmente, de manejar de manera correcta el lenguaje matemático, el cual es universal. Bajo esta perspectiva, se espera que el trabajo por competencias, aunado al trabajo constante de los alumnos, sea un material de apoyo útil para la resolución de problemas, aprovechando los conocimientos que el alumno ha venido desarrollando a lo largo de su estancia en los centros educativos y en las situaciones que le plantea la vida cotidiana.

Apóyense en este libro y lleven a diario la práctica del diálogo, de la crítica, la reflexión, el debate, el trabajo colaborativo, la retroalimentación, del uso de las técnicas y sobre todo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, que es una herramienta que permitirá tener conocimientos más significativos y por tanto obtener mejores aprendizajes.

Al estudiante

Te damos la bienvenida al tercero y último curso de matemáticas en tu educación secundaria. Te aseguramos que desarrollarás las competencias, habilidades y actitudes que te ayudarán a cursar con éxito el siguiente nivel de tu formación académica, que es el nivel medio superior.

En este libro de *Matemáticas 3. Por competencias*, se te proponen métodos para enfrentar los retos que constantemente surgen en la vida cotidiana. En él encontrarás las herramientas que te permitirán resolverlos de manera satisfactoria.

De acuerdo con cada uno de los ejes que se encuentran en este libro se te indicarán las competencias que desarrollarás durante tu curso de tercer grado, las cuales te ayudarán no sólo en tu formación académica, sino también en tu desarrollo como un ser social propositivo en la búsqueda de soluciones.

En el planteamiento de situaciones diversas podrás identificar el núcleo del problema y resolverlo mediante diferentes procedimientos, y, con argumentos que tú mismo desarrollarás, serás capaz de justificar o sustentar el procedimiento que elegiste y que te llevó al resultado esperado.

La comunicación efectiva es otro de los factores importantes que se requiere para el aprendizaje en general, no sólo de las matemáticas; por lo que la representación y la expresión oral o escrita, de manera colectiva o individual, son otras herramientas necesarias para alcanzar la resolución de un problema y poder argumentar los resultados obtenidos.

El manejo y desarrollo de las habilidades digitales de cualquier tipo de tecnología te permitirán obtener una mayor compresión de los aprendizajes que obtendrás durante el curso. Recuerda siempre que la globalización requiere de individuos que sean capaces de participar de manera constante ante los cambios que se producen día a día.

Por último, es importante prestar atención de manera respetuosa a las propuestas de procedimientos que hagan tus compañeros de grupo para abordar una problemática mediante los procedimientos que ellos consideren adecuados.

Al profesor

El propósito de este libro de *Matemáticas 3. Por competencias*, es ayudarlo a transmitir a los alumnos los conocimientos propios de esta materia para que desarrollen las capacidades y las actitudes que les permitan enfrentar los problemas que aquí se plantean y resolverlos con éxito; justificar sus resultados con argumentos sólidos; dominar diferentes métodos o técnicas para la resolución de diversas situaciones, y, sobre todo, comprender el lenguaje matemático, con la finalidad de poder comunicarse en este ámbito e interpretar el contexto de una situación.

En el estudio de las matemáticas es muy importante que se desarrolle el trabajo colaborativo e individual, esto permitirá una mayor retroalimentación acerca de la manera de cómo abordar y resolver una situación que se presente, no sólo en su libro, sino en su vida cotidiana. Desde esta perspectiva, el papel del docente es el de organizar y supervisar de manera ordenada el trabajo que los alumnos desarrollen, consolidando de esta forma los aprendizajes esperados.

En este libro se proponen situaciones que no son ajenas a los alumnos, pues se les presentan de manera común, mismas que deben resolver a partir de su aprendizaje. Estas propuestas tienen la finalidad de que cuando surja una situación similar en su vida cotidiana tengan las herramientas para resolverlas, comprobando y justificando siempre su proceder en la resolución.

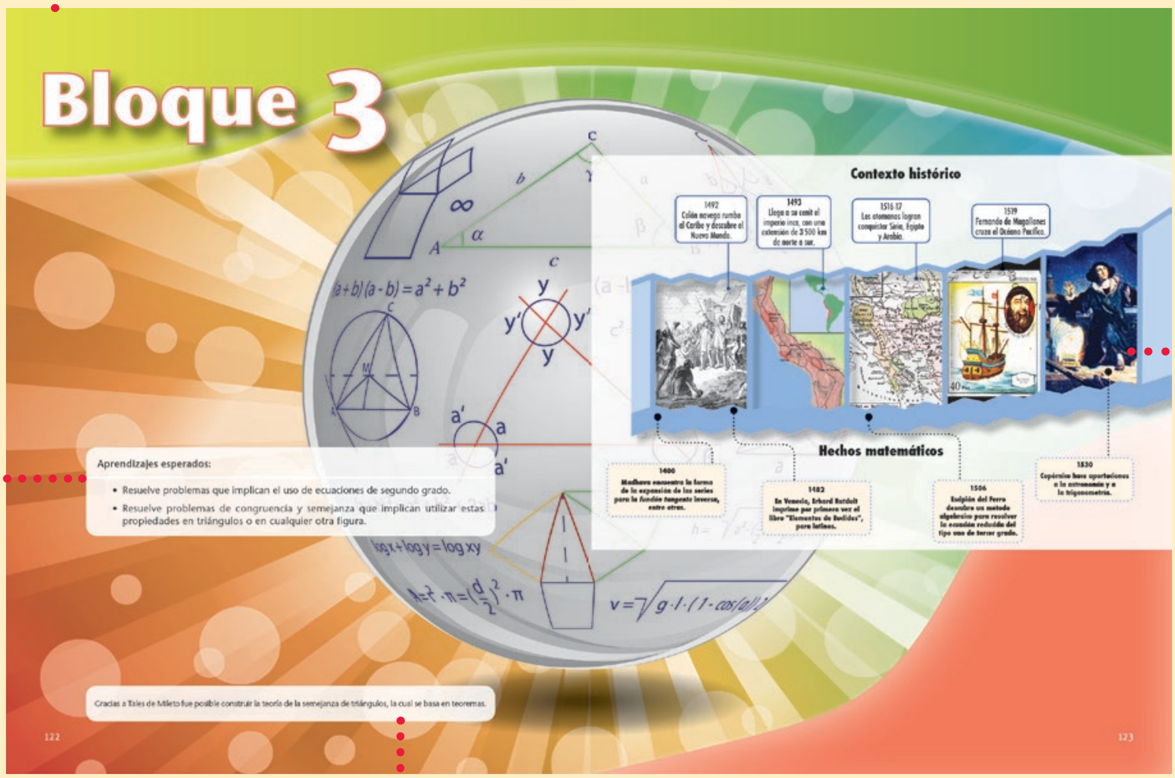
El manejo de las tecnologías de la información y la comunicación es esencial para que el alumno pueda desarrollar estas competencias, mismas que deben ser actualizadas de manera constante. El trabajo interdisciplinario con las demás áreas de estudio del nivel de secundaria será de mucha ayuda y favorecerá el desarrollo integral en los alumnos de una manera satisfactoria, posibilitando uno de los principales propósitos de este nivel es estudio: la formación de individuos capaces de aprender de manera autónoma.

Estructura de tu libro

Las secciones que conforman la estructura didáctica de *Matemáticas 3. Por competencias* fueron creadas pensando en jóvenes como tú, que requieren y hacen uso de conocimientos útiles y precisos para desarrollar sus competencias al máximo. Para alcanzar estos objetivos y aprovechar en su totalidad los recursos de esta obra te explicamos a continuación cómo está organizada.

Entrada de bloque

La estructura del libro se compone de 5 bloques. Al principio de cada uno se presentan los aprendizajes esperados, línea de tiempo, imagen alusiva a un tema del bloque y pie de imagen.



Línea del tiempo

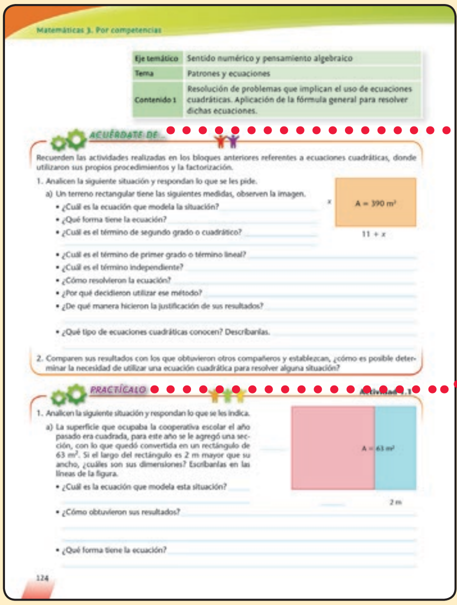
El propósito de esta sección es mostrar los vínculos históricos entre el desarrollo de la sociedad y las matemáticas.

Aprendizajes esperados

Se refiere a lo que se espera que desarrolles con el trabajo de cada secuencia didáctica.

Pie de figura

Relaciona la imagen de entrada con algún tema que se tratará en el bloque.



ACUÉRDATE DE...

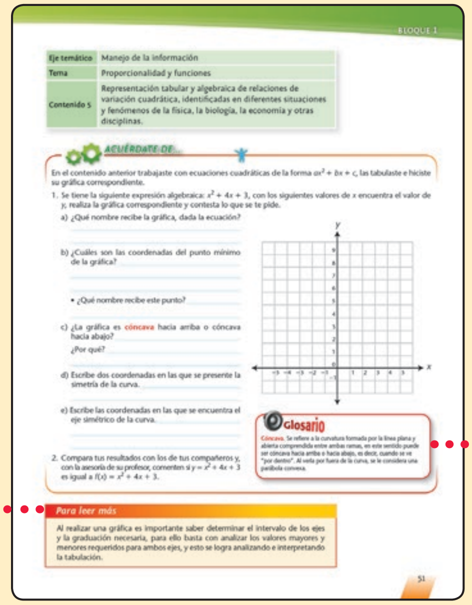
Te ayuda a reforzar lo que aprendiste en otro momento y a renovar tu experiencia. Con frecuencia se propone el trabajo en equipo para fomentar el desarrollo colaborativo y se plantean situaciones en las que desarrollarás tu capacidad para construir conocimientos.

PRACTÍCALO

Actividades diversas que incluyen ejercicios para que practiques, adquieras confianza, desarrolles autonomía y perfecciones tus competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) matemáticas.

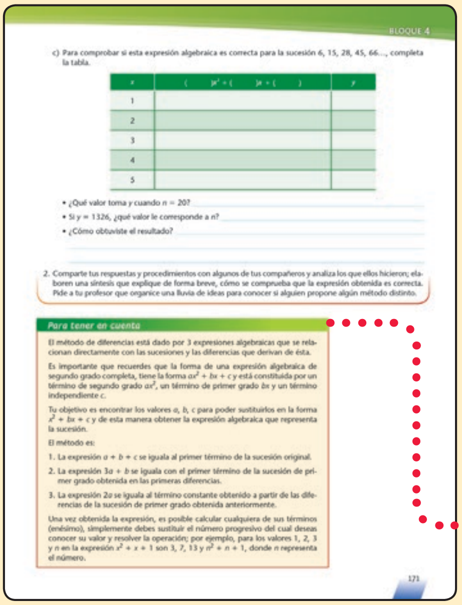
Para leer más

Te brinda datos que enriquecen el tema principal del apartado.



Glosario

Incluye la definición de aquellas palabras que pueden presentar alguna dificultad por su significado. En el texto las encontrarás destacadas en color **rojo**.



Para tener en cuenta

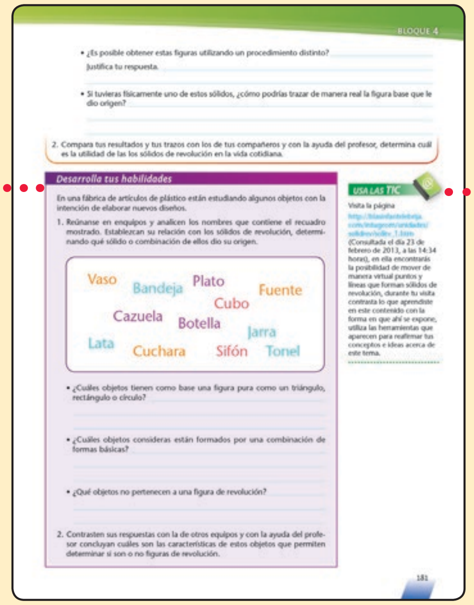
Esta sección está diseñada para ayudarte a consolidar los conceptos clave y facilitar la comprensión de los temas tratados. Es una herramienta para que deduzcas o infieras la solución a situaciones problemáticas que se te presentan a lo largo del libro.

LO QUE APRENDÍ

Su objetivo es ayudarte a identificar los aprendizajes que obtuviste durante la lección y así saber lo que aprendiste, lo que estás aprendiendo y lo que te falta por aprender; con esto identificarás logros y también retos por alcanzar para desarrollar más habilidades.

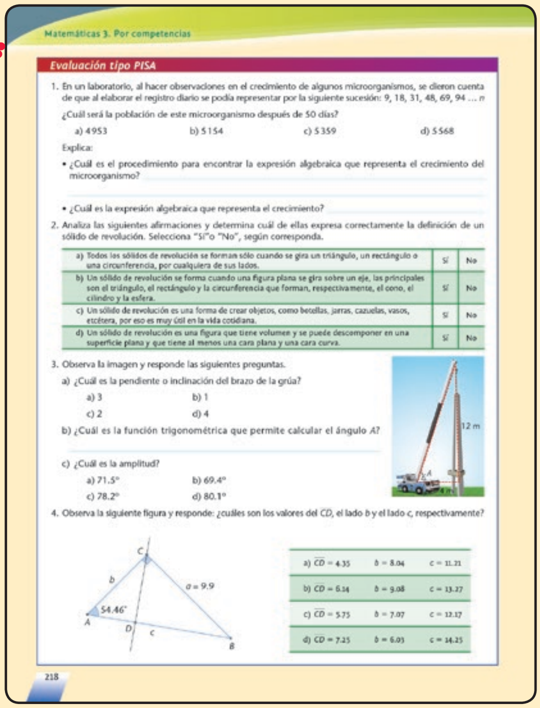
Desarrolla tus habilidades

Está diseñado para que, mediante una actividad lúdica, repases lo aprendido y determines tu grado de avance.



USA LAS TIC

Este apartado contiene recomendaciones para que consultes páginas electrónicas en las que obtendrás información de los temas desarrollados en tu libro; con las actividades sugeridas podrás reafirmar tus conocimientos.



Evaluación tipo PISA

Tiene el propósito de poner a prueba los conocimientos y habilidades que adquiriste a lo largo del bloque.

Índice

DOSIFICACIÓN DE CONTENIDOS

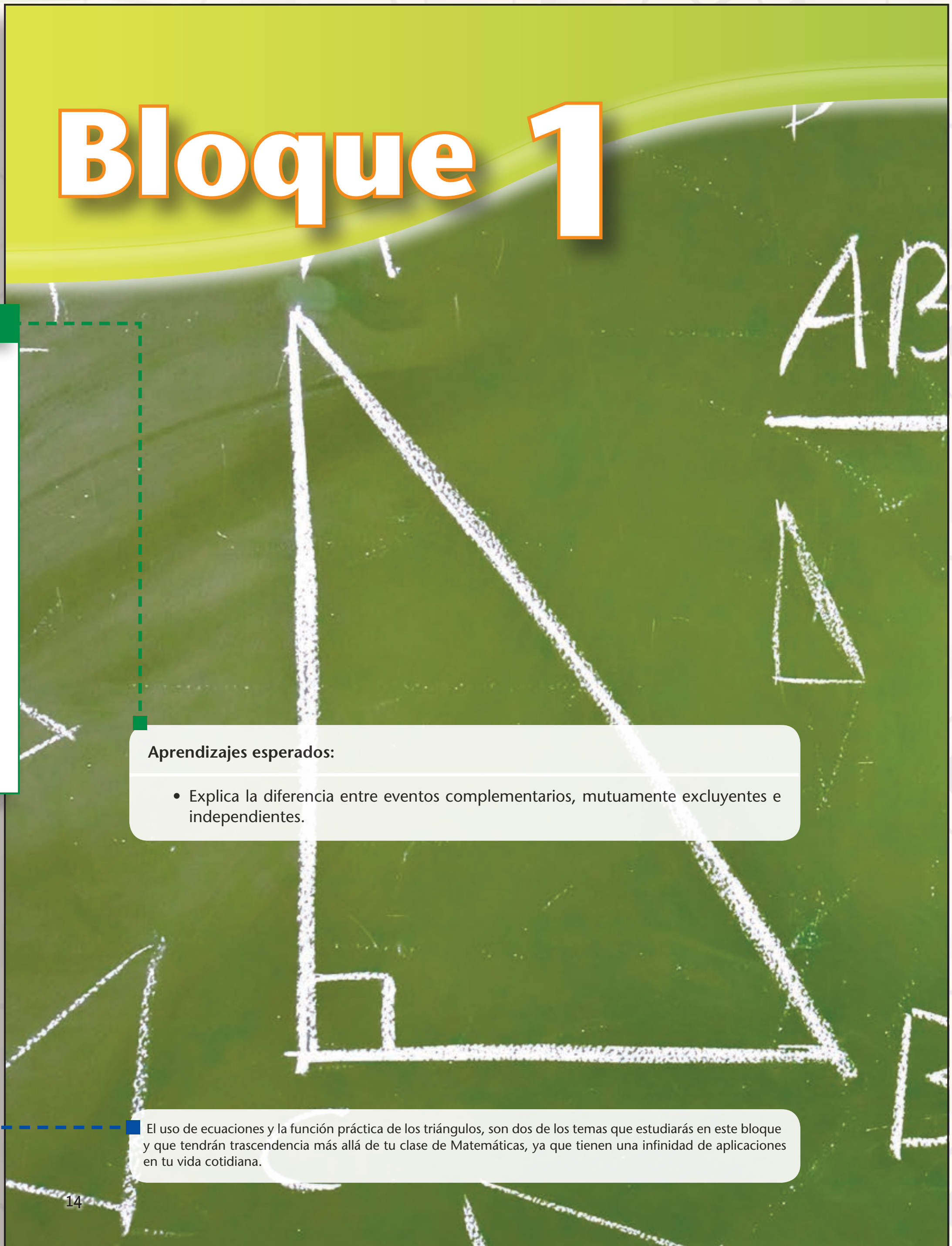
Para el desarrollo del programa y el logro de los aprendizajes esperados se consideran 200 días de trabajoy 40 horas por bloque. Se propone la siguiente distribución para que el profesor planifique sus tiempos:

10 sesiones para el diagnóstico inicial por apertura de curso.
2 sesiones para la aplicación y revisión de exámenes al finalizar cada bloque.
1 sesión en cada bloque para desarrollar la evaluación tipo PISA.
1 sesión en cada bloque para desarrollar la sección "Usa las TIC".
10 sesiones al finalizar el curso, para repaso general y reforzamiento de aprendizajes.

Eje	Tema	Subtema	Bloques					Sesión
			B1	B2	B3	B4	B5	
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	•					
		Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.		•				
		Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.			•			
		Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.				•		
		Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.					•	

Eje	Tema	Subtema	Bloques					Sesión
			B1	B2	B3	B4	B5	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	•					
		Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	•					
		Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.		•				
		Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.		•				
		Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.			•			
		Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.			•			
		Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotética.			•			
		Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.				•		
	Medida	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.		•				
		Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.		•				
		Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.				•		
		Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.				•		
		Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.				•		
		Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.					•	
		Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.					•	
		Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos, o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.					•	

Eje	Tema	Subtema	Bloques					Sesión
			B1	B2	B3	B4	B5	
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	•					
		Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	•					
		Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.				•		
		Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.			•			
		Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.			•			
		Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.					•	
	Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	•					
		Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).		•				
		Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).			•			
		Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.					•	
	Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	•					
		Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la “desviación media” con el “rango” como medidas de la dispersión.				•		



Bloque 1

Aprendizajes esperados:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

El uso de ecuaciones y la función práctica de los triángulos, son dos de los temas que estudiarás en este bloque y que tendrán trascendencia más allá de tu clase de Matemáticas, ya que tienen una infinidad de aplicaciones en tu vida cotidiana.

14

Qué observar

Es importante que siempre tenga presente lo que se espera que aprendan los estudiantes al finalizar el bloque, ya que esto permitirá orientar mejor la vinculación y el enlace entre contenidos de un mismo eje, de distintos o incluso con los de otras asignaturas.

Cómo enriquecer la actividad

Motive al alumno haciendo algunas preguntas, con la intención de generar interés y despertar su curiosidad sobre los nuevos conocimientos que va a adquirir, cuestiónelo acerca de las expectativas que tiene y que comparta cuáles son los logros que le gustaría alcanzar.

Contexto histórico

1633 a.n.e. Termina en Egipto la dinastía XIV y comienza la XV.

1000 a.n.e Inicia el esplendor del periodo Preclásico maya.

435 a.n.e En Grecia, Fidias esculpe la estatua de Zeus Olímpico.

300 a.n.e El rey Tolomeo I Soter, funda la biblioteca de Alejandría.

239 a.n.e Se introduce el año bisiesto en el calendario egipcio.

Hechos matemáticos

2000 a.n.e. Los babilonios resuelven por primera vez una ecuación cuadrática, a pesar de que no conocían las raíces negativas o complejas.

1000 a.n.e. Los árabes inventan el sitema decimal.

406-315 a.n.e. Eudoxo establece una teoría de semejanza.

300 a.n.e. Euclides enuncia por primera vez en su Libro 1, *Elementos*, la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

240 a.n.e. Eratóstenes, con ayuda de la trigonometría midió la circunferencia de la Tierra y la distancia al Sol, así como la inclinación del eje terrestre.

15

Cómo enriquecer la actividad

Motive a sus alumnos hacia el uso de la línea del tiempo, a partir de investigaciones referentes a los hechos matemáticos y al contexto histórico, trate de ubicar los sucesos y de destacar la importancia que tienen en la vida actual.

Qué observar

Propicie que los alumnos participen de forma individual y colectiva, con la finalidad de que observen que los contextos planteados no son ajenos a los que se presentan en la vida cotidiana.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que participen exponiendo sus procedimientos y resultados, procure hacer énfasis en el planteamiento de la ecuación y en el algoritmo que le da solución. Es común que los alumnos se confundan con ecuaciones que contienen un denominador.

Cómo enriquecer la actividad

Puede solicitar a los alumnos que recorten cuadrados y rectángulos de lados x, $2x$, $3x$, etc., y pida que formen figuras, calculen sus áreas, además que realicen sumas y restas por suposición.

Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido 1	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

ACUÉRDATE DE...

1. Analicen la situación planteada y respondan las preguntas.
   a) Ramiro tiene un perro como mascota, en este momento Ramiro tiene 12 años más que su perro, pero dentro de 4 años tendrá tres veces la edad que tendrá su perro. Diseñen una estrategia que les permita conocer la edad de ambos.
   - ¿Qué edad tiene Ramiro? 14 años
   - ¿Qué edad tiene su perro? 2 años
   - ¿Cómo representaron la edad de Ramiro? $x + 12$
   - ¿Cómo representaron la edad de su perro? x
   - Entonces, ¿qué expresión modela esta situación y permite darle solución? $x + 4 = \frac{(x + 12) + 4)}{3}$
   - ¿De qué tipo de expresión se trata? De una ecuación de primer grado.
   - Escriban las operaciones que llevaron a cabo.

$x + 4 = \frac{(x + 12) + 4)}{3}$	$x = \frac{4}{2}$	Comprobación
$3x + 12 = x + 16$	$x = 2$ (Edad del perro)	$2 + 4 = 6$ y $14 + 4 = 18$
$3x - x = 10 - 12$	Por lo tanto $x + 12 = 14$	18 es el triple de 6
$2x = 4$	Ramiro tiene 14 años	

   - ¿Qué procedimiento siguieron para resolver la expresión que plantearon? Se establece una relación de cantidades considerando la variante de 4 años y la condición de que la mayor debe ser el triple de la menor, lo que permite plantear la ecuación.
   - ¿De qué manera pueden comprobar que su resultado es correcto? Sumando 4 años a las edades actuales de cada uno, si el resultado de la mayor es el triple de la menor entonces las cantidades son correctas.

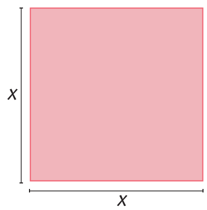
2. Contrasten sus resultados con los que obtuvieron algunas parejas cercanas, y con la ayuda del profesor determinen y escriban en sus cuadernos las conclusiones a las que llegaron.
   a) ¿Cuál es y cómo se realiza la secuencia de operaciones para resolver una expresión de este tipo?
   b) ¿Cómo es posible comprobar que verdaderamente la expresión modela la situación planteada?

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

PRACTÍCALO **Actividad 1.1**

En los grados anteriores trabajaron con la resolución de situaciones en las que plantearon y resolvieron ecuaciones lineales con una y dos incógnitas.



1. Lean la siguiente situación y contesten lo que se les indica.
   a) Don Matías quiere comprar un terreno cuadrangular, pero desconoce sus dimensiones.
      - ¿De qué manera se puede obtener el área? Multiplicando x por x grado.
      - Escriban la expresión algebraica que representa al área de esta figura. $A = x^2$
      - En la expresión algebraica x^2, ¿qué indica el número 2 en la base x? El número de veces que se multiplica la base.
      - ¿Por qué? Porque es un exponente.
      - Si don Matías sólo recuerda que el área es de 625 m^2, ¿mediante qué procedimiento puede calcular el valor de cada uno de los lados? Utilizando una raíz cuadrada
      - ¿Cómo quedaría la expresión algebraica para llevar a cabo este procedimiento? $x = \sqrt{625}$
      - Por lo tanto, cada lado mide: 25 m
      - ¿Cómo se llama la expresión algebraica que acabas de obtener de la situación del terreno de don Matías? Expresión de segundo grado.
      - ¿Cuál es el procedimiento que utilizaron para llegar al resultado? Planteando una raíz, que es la operación inversa a la potencia.
2. Compartan sus resultados y compárenlos con los de sus compañeros. Con la asesoría de su profesor realicen un repaso de cómo calcular la raíz cuadrada por el método del algoritmo. Resuelvan algunos ejercicios y problemas sencillos.

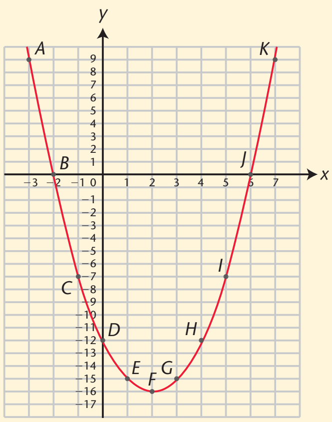
Para tener en cuenta

En una ecuación de segundo grado o cuadrática el exponente máximo que puede tener una incógnita es 2. Analiza la siguiente condición, esto te permitirá observar y deducir las respuestas y conclusiones necesarias.

$$y = x^2 - 4x - 12$$

	x	y
A	−3	9
B	−2	0
C	−1	−7
D	0	−12
E	1	−15
F	2	−16

	x	y
G	3	−15
H	4	−12
I	5	−7
J	6	0
K	7	9



Qué observar

Para este momento el alumno debe inferir algunas soluciones. Es importante orientarlo hacia la obtención de productos mediante el cálculo mental, sin forzar la situación hacia una fase memorística.

Cómo enriquecer la actividad

Promueva algunas competencias en el diseño y solución de este ejercicio.

Pida que algunos alumnos expongan sus procedimientos, los argumenten y obtengan conclusiones.

Curiosidades, acertijos y más

¿Qué sucede con el área del cuadrado al duplicar la medida de uno de sus lados?, y ¿qué sucede con el perímetro?

Encuentre al menos un caso en el cual el perímetro y el área tengan el mismo valor absoluto.

Bitácora pedagógica

Cambiando números

Para resolver el ejercicio número uno indique a los alumnos que consideren que el producto entre estos dos números es igual a 1056.

Qué observar

El alumno debe conocer los diferentes caminos para encontrar un producto. Algunos de ellos ya podrán resolver esta actividad de manera inmediata, para otros será necesario recurrir a alguna figura o incluso a la mecanización. Considere que no todos los alumnos aprenden con la misma rapidez, debido a que no han alcanzado la madurez necesaria.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que expliquen cuál es la importancia de realizar un proceso de razonamiento en la resolución de este tipo de situaciones y que determinen cuál es la utilidad al momento de expresarla de manera algebraica.

PRACTÍCALO

Actividad 1.2

1. En la escuela Felipe Neri se llevó a cabo un maratón, en el que Dulce y Mario llegaron en primer lugar. Ayuden al jurado a resolver cuáles son los números de registro de los alumnos que llegaron primero, consideren que son números consecutivos, y el producto de estos dos números es igual 1 050.
   a) ¿Cuál es la ecuación que utilizan para resolver esta condición? Una ecuación de segundo grado.
   b) Existen dos números enteros consecutivos cuyo producto es igual al de la ecuación planteada. Completen la tabla para encontrarlos.

x	$x + 1$	$x(x + 1)$
30	31	30(31) = 930
31	32	31(32) = 992
32	33	32(33) = 1056
33	34	33(34) = 1122
34	35	34(35) = 1190
35	36	35(36) = 1260

- Los números cuyo producto es igual a 1050 son 32 y 33
- Si los números fueran negativos, ¿se obtendría el mismo resultado? Sí
- ¿Por qué? Porque la ley de los signos indica que el producto de dos números negativos o dos positivos siempre es positivo.
- Expliquen cómo comprobarían su resultado. La multiplicación encontrada es en sí la comprobación de situación dada ya que 32 y 33 son números consecutivos y en efecto su producto es 1056.

2. Contrasten sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la asesoría de su profesor concluyan, ¿cuál es la manera correcta de elaborar una expresión algebraica que refleje la situación planteada?

Para leer más

Las ecuaciones cuadráticas se pueden expresar como: x^2, $2x^2$, $\frac{3}{5}x^2$, etcétera, sin embargo existen expresiones que dan origen a una cuadrática. Por ejemplo: $x(x + 6)$, aplicando la propiedad distributiva, tenemos que esta expresión se convierte en: $x^2 + 6x$, o también si la ecuación es $(x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1$.

Para tener en cuenta

Las soluciones de una ecuación cuadrática son dos, dado que si sustituimos ambos valores (positivo y negativo) en la ecuación cuadrática el resultado será el mismo.

Curiosidades, acertijos y más

¿Qué tan válido es afirmar que todo triángulo equilátero es un triángulo isósceles? Pida al alumno que lo explique.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

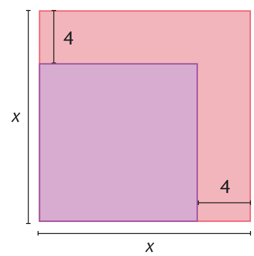
PRACTÍCALO **Actividad 1.3**

1. Lean con atención las siguientes condiciones y contesten lo que se les solicita.

   a) Alejandro compró un libro de juegos y retos matemáticos, al resolver un crucigrama algebraico encontró un dato que dice: el cuadrado de tres veces un número, más 24, es igual a 240. Analicen esta condición y contesten las preguntas.

   - ¿Cuál es la ecuación que representa esta condición? $3x^2 + 24 = 240$
   - ¿Cuál es el valor del número que cumple con ésta? $x = 8.485$
   - ¿Cuántas soluciones puede presentar dicha ecuación? Dos soluciones iguales, una positiva y otra negativa.
   - ¿Por qué? Porque todo número elevado al cuadrado siempre es positivo, por lo tanto, la raíz cuadrada tiene dos soluciones, una negativa y otra positiva.
   - ¿De qué manera harían la comprobación si es que encontraron dos posibles soluciones? Sustituyendo el valor de x en la ecuación planteada, como el resultado es decimal truncado el número obtenido debe ser una aproximación muy cercana a 240.

   b) Se tiene un terreno donde se va a construir una casa de forma cuadrada, sin embargo, el dueño quiere que se coloque un jardín alrededor, como se indica en la imagen.

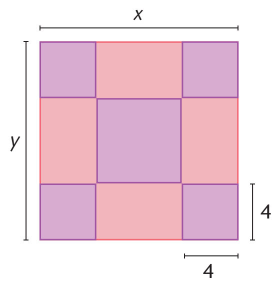


   - ¿Cuánto mide cada lado? $x - 4$
   - ¿Cómo se expresaría algebraicamente su área? $A = (x - 4)^2$
   - Expliquen cómo la obtuvieron. Como es un cuadrado se multiplica dos veces la medida de su lado.
   - ¿Qué nueva expresión se obtiene si se desarrolla? $x^2 - 8x + 16$
   - Si el terreno midiera 225 m², ¿cuál sería el valor de x? 15 m²
   - Entonces, ¿cuántos metros cuadrados tendría la casa? 121 m²
   - ¿Y el jardín? 104 m²
   - ¿De qué manera es posible comprobar que estos resultados son correctos? Sumando el área de la casa y del jardín, o bien sustituyendo en las expresiones algebraicas.

2. Comparen sus resultados con los del resto del grupo y con la asesoría de su profesor comenten cómo comprobarían sus resultados.

PRACTÍCALO **Actividad 1.4**

En la actividad anterior obtuviste una expresión de segundo grado, ahora obtén una similar a partir del siguiente caso.



1. En una fábrica de cajas de cartón quieren fabricar una caja cuadrada a partir del siguiente trazo.

   a) Analiza, resuelve y explica lo que se te pide.

   - ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la base del cuadrado? $x - 8$
   - Argumenta cómo la obtuviste. Ya que a cada lado se le están quitando dos segmentos de 4 unidades cada uno, entonces al lado "x" se le están quitando en realidad 8 unidades.

Qué observar

Ponga especial atención en que el alumno comprenda la relación que hay cuando se desarrolla una expresión algebraica de segundo grado o cuando se simplifica, y motive constantemente a que comprueben los resultados que van obteniendo.

Cómo enriquecer la actividad

Esta actividad requiere mucho razonamiento y el uso de la imaginación espacial de los alumnos, ésto les facilitará su comprensión por qué la expresión que obtienen es de segundo grado. Dé el tiempo necesario para llevar a cabo este análisis y verifique que comprenden el significado de la expresión cuadrática.

Cómo enriquecer la actividad

Para resolver la actividad 1.4, indique que observen el cuadro y que cambien la variable "y" por la variable "x".

Bitácora pedagógica

Reflexión

Es importante propiciar que el trabajo en parejas sea efectivo y se convierta en un espacio donde, con respeto, los alumnos aclaren dudas y establezcan una conclusión o solución por consenso.

Qué observar

Ponga especial atención en cómo desarrollan la multiplicación para llegar a la expresión cuadrática de la superficie, es importante resaltar que ésta contiene un término de segundo grado, uno de primer grado y un término independiente.

Cómo enriquecer la actividad

Oriente a los alumnos para que recuerden y utilicen algunos procedimientos auxiliares, como la aplicación de la propiedad distributiva y la reducción de términos semejantes.

Recursos y materiales

En la página *Expresiones matemáticas* encontrará una serie de ejercicios que contibuirán a enriquecer su clase en el tema y el desarrollo de habilidades lógico-matemáticas.

http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/Cuad_Eq/cuadeq_home.html

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la altura? $x - 8$
- Algebraicamente, ¿cuál es la superficie del cuadrado? $x^2 - 16x + 64$
- Entonces, ¿cuánto mide únicamente la superficie con la que se construirá cada caja? x^2
- ¿Por qué? Porque el lado del cuadrado mide "x".

2. Haz tus comprobaciones y compara tus respuestas con las del resto de tus compañeros, y con la asesoría de tu profesor comenten si existen ecuaciones cuadráticas incompletas y por qué.

PRACTÍCALO **Actividad 1.5**

1. Resuelvan las siguientes operaciones, determinen la ecuación cuadrática y planteen, en su cuaderno, un problema que se resuelva con dicha ecuación.

a)	$3(x - 3) - 3(x + 3) = (x + 3)(x - 3)$	$x^2 - 9 = 0$
b)	$x(x - 5) + 3(x + 2) = 3x$	$x2 - 5x + 6 = 0$
c)	$9(x + 5) = 2x(x - 7) + 5(x + 9)$	$2x^2 - 8x = 0$
d)	$2x(x) + 8(x + 3) = x(x + 4) + 12$	$x^2 + 4x + 12 = 0$
e)	$2(x + 6) + (x + 2)(x - 2) = 2x + 8$	$x^2 = 0$

2. Comparen la forma que tienen las ecuaciones finales obtenidas con las de la tabla siguiente y complétenla, según corresponda con la forma que finalmente quedó.

$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 = 0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$2x^2 - 8x = 0$	$x^2 - 9 = 0$	$x^2 = 0$

- ¿Por qué no todas las ecuaciones cuadráticas son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$? Porque una ecuación cuadrática puede carecer de término de primer grado o término independiente, siempre y cuando conserve su término de segundo grado.
- ¿Cómo las pueden identificar o diferenciar? Por su forma, si son completas o incompletas e identificar qué termino les hace falta.
- ¿Qué nombre les darían? Completas, o incompletas sin término de primer grado, término independiente o sin ambos.
- ¿Por qué? Porque la manera más sencilla es analizar los términos que contiene para poder diferenciarla.

Bitácora pedagógica

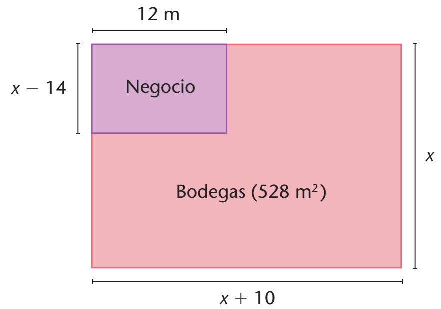
BLOQUE 1

- ¿Qué característica las hace ser cuadráticas? Que el grado máximo de los términos que contiene es de segundo grado.

3. Comparen sus respuestas y la tabla con algunos de sus compañeros y con la asesoría de su profesor comenten cómo se puede resolver este tipo de ecuaciones.

PRACTÍCALO **Actividad 1.6**

1. Una empresa destina una parte de un terreno para su negocio y el resto como bodega. Ésta tiene una superficie de 528 m^2, sin contar el negocio, y se sabe que su largo mide 10 m más que su ancho, y que el negocio mide 12 m de largo y su ancho mide 14 metros menos que el ancho de todo el terreno.



a) Diseñen una estrategia que les permita conocer las dimensiones de la bodega y del negocio.
   - ¿Qué expresión algebraica representa la superficie total del terreno, considerando únicamente sus lados? $x(x + 10) = 528 + 12(x - 14)$ Haciendo operaciones queda $x^2 - 2x - 360 = 0$
   - ¿De qué grado es esta expresión algebraica? Segundo grado
   - ¿Qué tipo de ecuación es? $ax^2 + bx + c = 0$
   - ¿Con sólo estos datos es posible conocer el valor de x? Sí

     Justifiquen su respuesta. La ecuación planteada, al ser resuelta, arroja dos resultados $x_1 = 20$ y $x_2 = -18$, la segunda medida no es significativa, porque es un negativo y lo que se busca es una distancia, por lo tanto, la respuesta correcta es 20.
   - ¿Qué expresión algebraica permite obtener el área del negocio? $12(x - 14) = 72$
   - ¿De qué grado es esta expresión? Primer grado
   - Entonces, ¿qué expresión algebraica permite obtener el área total del terreno? $x(x + 10) = 600$
   - Al desarrollar esta expresión, podemos conocer el valor de x, que es: $x = 20$
   - Simplificando esta ecuación en la forma $x^2 + bx + c = 0$, se tiene que: $x^2 + 10x - 600 = 0$

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros, y con la ayuda del profesor propongan diversas estrategias para encontrar la expresión algebraica y determinen, ¿cuál es la más sencilla para encontrar el valor del ancho del terreno y cómo se puede comprobar?

Qué observar

El alumno debe obtener de manera inmediata la pareja de factores que den lugar al producto dado, considere que es importante que comprenda cómo se está manejando el área total, así como la manera en que esto influye en el planteamiento de la expresión algebraica.

Cómo enriquecer la actividad

Resulta muy valioso observar las diferentes estrategias que utilizan los alumnos para resolver esta situación. Es conveniente que exista la participación y el intercambio de experiencias al momento de que los alumnos expongan sus resultados.

Reflexión

Para que un grupo cumpla sus metas, cada integrante debe respetar su compromiso con los demás, que es la promesa de actuar juntos para lograr el bien de todos. Una persona comprometida es aquella que se preocupa por el bienestar de los otros, que cumple las reglas y que participa activamente en las tareas que le corresponden.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Es frecuente que el alumno, por ahorrar tiempo, tome este producto como un caso general. Debe considerarse que el estudiante identifique perfectamente que se está obteniendo el producto de un binomio al cuadrado y no resuelva sin antes razonar cada paso del procedimiento.

Cómo enriquecer la actividad

La mayor riqueza para el logro de aprendizajes se tiene en las diferentes formas de aprender de los alumnos. Conviene que un alumno exponga ante el grupo el procedimiento utilizado. Entre más alumnos participen, más rica será la información, debido a que no todos los alumnos resuelven de la misma manera.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

Verifique mediante preguntas abiertas la aplicación de este tipo de expresiones en el conocimiento de diversidad de un área determinada, con el fin de conocer las dimensiones donde se realiza un muestreo que permita conocer la diversidad de especies de plantas y animales.

Matemáticas 3. Por competencias

Para tener en cuenta

Las ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (ecuación cuadrática completa)}$$

Tienen los tres términos: uno de segundo grado, uno de primero y un término independiente, todo igualado a cero.

En algunos casos falta el término bx, dando la forma:

$$ax^2 + c = 0 \text{ (ecuación cuadrática incompleta pura)}$$

En otros casos falta el término c, dando la forma:

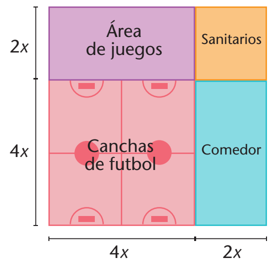
$$ax^2 + bx = 0 \text{ (ecuación cuadrática incompleta mixta)}$$

Pero también pueden faltar ambos, dando la forma $ax^2 = 0$.

En estos casos se dice que la ecuación es incompleta. El término ax^2 no puede faltar porque entonces la ecuación sería de segundo grado.

LO QUE APRENDÍ

1. En una comunidad se quiere construir un deportivo para la población; las autoridades donarán un terreno, el cual dividirán en dos canchas de futbol, un área de juegos, un comedor y sanitarios, tal como se muestra en la figura.



a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de todo el terreno? $A = 36x^2$

b) ¿De qué forma obtuvieron el resultado? Se reducen los lados $4x + 2x = 6x$ y esta medida se eleva al cuadrado.

c) ¿Cuál sería el área para cada uno de los espacios?

Canchas de futbol: $A = 16x^2$ Sanitarios: $A = 4x^2$

Comedor: $A = 8x^2$ Área de juegos: $A = 8x^2$

d) ¿Cómo son las áreas destinadas para el comedor y la zona de juegos? Tienen la misma medida.

- ¿Por qué? Porque la medida de sus lados son iguales.

e) Si sumaran todas las áreas para cada sección del deportivo, ¿sería igual o diferente al área total del terreno? Igual

Justifiquen su respuesta. "El todo es igual a la suma de sus partes".

2. Diseñen en su cuaderno un problema similar al propuesto en esta actividad e intercámbienlo con el de algún equipo cercano para que lo resuelvan; al terminar, contrasten sus diseños y las expresiones algebraicas obtenidas.

3. Comparen sus resultados con los de otros compañeros, y con la asesoría de su profesor concluyan, ¿por qué en este caso aparece únicamente el término de segundo grado y no aparecen los valores de bx y de c de la forma $ax^2 + bx + c$?

Bitácora pedagógica

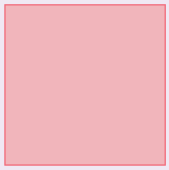
BLOQUE 1

Desarrolla tus habilidades

1. A una alberca cuadrada (Fig. A) se le aumentaron 5 metros de largo y 8 metros de ancho, con lo que se formó un rectángulo (Fig. B) cuya área es $4x^2 + 26x + 40$.

   a) Con base en esta información, reúnete con un compañero para resolver lo que se pide.

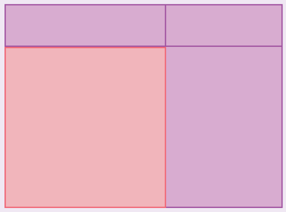
Figura A



$2x$

$2x$

Figura B



$2x$

$2x$

- ¿Cuáles son las dimensiones de la alberca rectangular que se construyó?

  Base: $2x + 5$

  Altura: $2x + 8$

- Si el área de la nueva alberca se construyó de modo similar a la de la figura B, es decir, a partir de un cuadrado de lado $2x$ y su área, es de $4x^2 + 14x + 12$, ¿Cuántas unidades aumentó?

  Largo: 2 metros

  Ancho: 3 metros

- Expliquen cómo encontraron ambos valores.

  Se tiene que descomponer (factorizar) la expresión algebraica para obtener los binomios de los cuales proviene. En este caso $(2x + 2)(2x + 3)$.

2. Compara tus resultados con los de tus compañeros, expresa ante el grupo la estrategia que llevaste a cabo para validar tus resultados.
3. Escribe en tu cuaderno la forma en que pondrías en práctica el uso de las ecuaciones cuadráticas para resolver problemas en tu vida cotidiana; compártelo con tus compañeros.

USA LAS TIC

En la siguiente página electrónica http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas-solucionador.html (Consultada el día 16 de enero de 2013, a las 14:35 horas), encontrarás un solucionador de ecuaciones cuadráticas que te puede ser de utilidad para comprobar tus resultados. Después de tu visita comenta con tus compañeros y tu profesor, ¿cuál debe ser el uso más adecuado que puedes hacer de este recurso?

Qué observar

El alumno debe manipular de manera correcta las operaciones con expresiones algebraicas. No debe perderse de vista el propósito inicial, el cual tiene que ver con efectuar cálculos de la manera más sencilla y lógica posible.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que desarrollen los procedimientos completos en su cuaderno, esto les dará la oportunidad de poder analizarlos y compararlos entre sí, además podrá ver lo útil que es hacer esto cuando tengan que modificar la condición de los datos dados.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

Verifique mediante preguntas abiertas la aplicación de este tipo de expresiones en el conocimiento de diversidad de un área determinada, con el fin de conocer las dimensiones donde se realiza un muestreo que permita conocer la diversidad de especies de plantas y animales.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Deles tiempo y libertad a los alumnos para que resuelvan. Los planteamientos tienen la intención de involucrar al alumno con el razonamiento deductivo, sin llegar a la demostración formal. Asegúrese de que lean y entiendan cada una de las preguntas propuestas.

Cómo enriquecer la actividad

Válgase de los alumnos que a su juicio están realizando la actividad de manera adecuada para que la expongan ante el grupo, en caso de que ninguno de ellos lo haya logrado, es su turno. Realice más ejercicios de este tipo para desarrollar el análisis del alumno, de ser posible permita que ellos mismos propongan las nuevas situaciones.

Recursos y materiales

En la página virtual de la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales podrá encontrar un simulador que le permitirá preparar sus clase en el tema de la construcción de triángulos.

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_165_g_1_t_3.html?open=instructions&from=topic_t_3.html

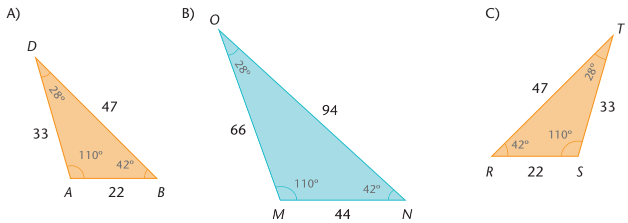
Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 2	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

ACUÉRDATE DE...

En la vida cotidiana, es común encontrarnos con figuras que son iguales entre sí en todos sus aspectos o que son muy parecidas, por ejemplo, algunas tienen la misma forma pero distinto tamaño, con los triángulos en geometría ocurre un caso particular.

1. Analicen los siguientes triángulos y respondan lo que se les indica. Consideren que en temas anteriores ya han estudiado la construcción de triángulos con base en ciertos datos y han analizado las condiciones de posibilidad y unicidad de las construcciones.



- ¿Cuáles son las principales características que permiten asegurar que los triángulos A y C son idénticos? Las medidas de sus lados y sus ángulos.
- ¿Consideran que al comparar los triángulos A y C con el triángulo B tienen la misma forma? ______ ¿Cómo se puede comprobar esto? Calculando la proporción entre sus lados.
- ¿Qué características consideran que nos permiten asegurar que a pesar de tener tamaños distintos los triángulos A y B tienen la misma forma? Al comprobar que sus ángulos internos miden lo mismo.

Glosario

Razón. Cociente de dos números o dos cantidades que se comparan entre sí.

- ¿Qué **razón** geométrica se obtiene al relacionar sus ángulos homólogos? La razón entre los triángulos B y C es 2:1 (dos es a uno).
- Seleccionen una pareja de triángulos que tengan la misma forma, pero que sean de distinto tamaño. ¿Qué pueden decir de sus ángulos? Que sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.
- ¿Qué razones se obtienen al comparar las parejas de lados correspondientes? Se obtiene una constante, es decir, que es la misma al comparar los lados correspondientes.

2. Tomen una hoja cuadriculada, tracen un triángulo a su gusto y de buen tamaño, que coincida con los vértices de la cuadrícula, tracen ahora dos triángulos que tengan la misma forma pero que sean de distinto tamaño: uno al doble de tamaño y otro a la mitad.

   a) Qué diferencias hay entre dos triángulos que tienen ángulos y lados iguales con los que tienen ángulos iguales y lados proporcionales. Que unos son idénticos y los otros son parecidos.

3. Comparen sus repuesta con las que obtuvieron otros compañeros y argumenten cómo fue que respondieron la actividad; por último, concluyan mencionando cuáles condiciones deben cumplir dos triángulos de distinto tamaño para que tengan la misma forma.

Bitácora pedagógica

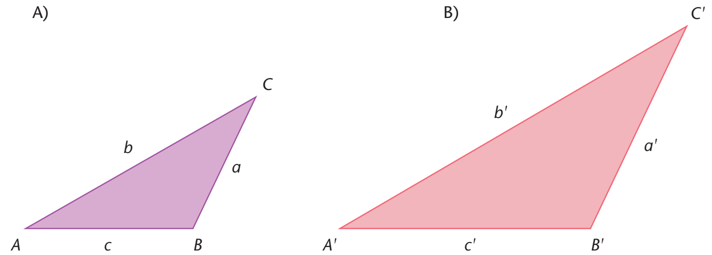
BLOQUE 1

Para tener en cuenta

El triángulo es un polígono que tiene algunas peculiaridades, por ejemplo, es el único polígono indeformable y es el que tiene el menor número de lados, por estas características es muy utilizado en la construcción de puentes, edificios, estructuras de soporte, etcétera, de ahí la importancia que tiene encontrar las relaciones entre los triángulos, sus ángulos y sus lados.

PRACTÍCALO **Actividad 2.1**

1. Analicen los siguientes triángulos y diseñen una estrategia que les permita saber si sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales.



- ¿De qué manera pueden saber si estos dos triángulos tienen la misma forma? Comparando las medidas de sus ángulos internos.
- ¿Encontraron algún tipo de correspondencia entre ambas figuras? Sí
  Expliquen, ¿por qué ocurrió esto? Sus ángulos homólogos son iguales y sus lados proporcionales.
- ¿Cómo determinarían las medidas de los ángulos internos? Por medio de un transportador para medir ángulos.
- ¿Cuáles ángulos son correspondientes entre sí? A con A' = B con B' = C con C'
- ¿Existe alguna relación entre los lados de ambos triángulos? Sí, son proporcionales.
  ¿Por qué ocurre esto? Porque al dividir los lados correspondientes se obtiene una constante.
- ¿De qué manera se puede expresar esta relación entre los lados y comprobar que es correcta? Al obtener los tres cocientes de los lados correspondientes para verificar que sea el mismo número.
- ¿En qué unidades consideran que es más conveniente expresar la longitud de los lados? En unidades lineales.
  Expliquen, ¿por qué? Porque se trata de solo una dimensión.
- Registren la medida de cada uno de los lados en las figuras en las unidades que seleccionaron.

  a = ______ b = ______ c = ______
  a' = ______ b' = ______ c' = ______

- ¿Cuál es la razón de los lados correspondientes? La que los alumnos concluyan como razón de semejanza.

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos, y concluyan por qué la razón entre los lados correspondientes uno o menor de uno.

Qué observar

Vigilar que los alumnos se involucren con situaciones de esta naturaleza, mismas que lo llevarán a deducir situaciones a partir de otras proposiciones. Son formas que nos permitirán introducir al alumno en el razonamiento deductivo.

Cómo enriquecer la actividad

Puede reproducir las imágenes en el pizarrón para que algunos alumnos socialicen sus respuestas y lleguen a conclusiones equivalentes. Promueva las discusiones de grupo y permita que ellos mismos intenten aclarar sus propias dudas.

Se espera que el alumno tome sus propias medidas y que concluyan que la razón que obtengan presente valores muy cercanos.

Curiosidades, acertijos y más

¿Qué tan válido es afirmar que todo triángulo equilátero es un triángulo isósceles? Pida al alumno que lo explique.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Deje el tiempo necesario para que el alumno resuelva esta actividad. Vigile que al establecer sus conclusiones, éstas resulten equivalentes.

Cómo enriquecer la actividad

El concepto de razón de semejanza es relativamente sencillo, pero es bien sabido que a algunos alumnos les cuesta trabajo imaginarlo y poder interpretar lo que significa la "razón", es por ello que es conveniente analizar casos similares a éste durante la clase, con la intención de afianzar este concepto y que lo dominen con mayor confianza.

Reflexión

Sobre la creatividad y las matemáticas

Para el filósofo y matemático inglés Bertrand Russell (1872-1970), "las matemáticas poseen no solo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura". Pida a los alumnos reflexionar y explicar con sus propias palabras el significado de este pensamiento.

Matemáticas 3. Por competencias

Para leer más

Para indicar que dos triángulos son semejantes se utiliza el símbolo ~, por ejemplo: Δ *ABC* ~ Δ *A'B'C'*, y se lee: el triángulo *ABC* es semejante al triángulo *A'B'C'*.

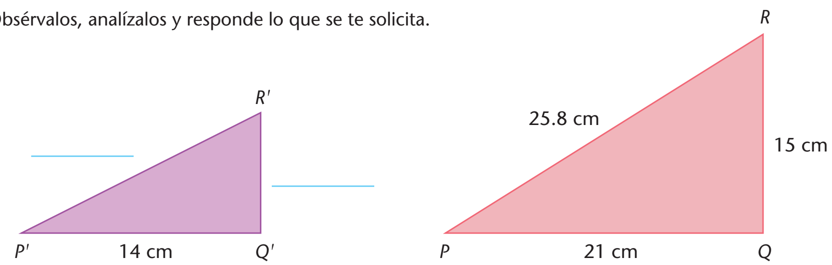
PRACTÍCALO

Actividad 2.2

Los triángulos rectángulos son muy importantes, pues el hecho de que tengan un ángulo recto los hace muy útiles en la vida cotidiana, por ejemplo, cuando se sujeta una antena con un tensor o cuando se quiere encontrar la distancia entre dos puntos perpendiculares; esto ocurre por la relación que se les puede dar con las líneas horizontales y verticales con las que convivimos a diario y que, por supuesto, son perpendiculares. Traza en tu cuaderno algunas cosas u objetos de tu vida cotidiana que se relacionen con los triángulos rectángulos, puedes iniciar con la antena, con tensores o con los soportes para un librero.

1. Los siguientes triángulos rectángulos tienen lados proporcionales. El Δ *P'Q'R'* es la imagen del Δ *PQR*.

   a) Obsérvalos, analízalos y responde lo que se te solicita.



- ¿Cuál será el valor de las medidas de los segmentos $\overline{P'R'}$ y $\overline{Q'R'}$ del Δ P' Q' R'?
  $\overline{P'R'}$ = 17.2 cm $\overline{Q'R'}$ = 10 cm
- Explica cómo los obtuviste. Se puede resolver por medio de una regla de 3 simple, al relacionar las bases de los triángulos y dos de sus lados homólogos, donde uno sea el tercer dato y el otro la incógnita.
- Establece las razones entre los lados homólogos de ambos triángulos en el orden Δ P'Q'R' y Δ PQR. Simplifícalas. $r = \frac{14}{21}$ $r = \frac{10}{15}$ $r = \frac{25.8}{17.2}$
- ¿Cómo son estas razones simplificadas? Iguales, todas se reducen a $r = \frac{2}{3}$ o bien 0.6

  ¿Por qué? Porque los triángulos son semejantes, entonces la razón entre sus lados es la misma.
- Si se hubieran tomado primero los elementos del Δ PQR y en segundo lugar los del Δ P'Q'R', ¿cuál sería la razón resultante? $r = \frac{21}{14}$ $r = \frac{15}{10}$ $r = \frac{17.2}{25.8}$ reduciendo queda $r = \frac{2}{3}$ o bien r = 1.5

   b) Con base en los ejemplos que planteaste anteriormente, en tu cuaderno reproduce dos de los triángulos previos. Elabóralos con las mismas medidas; al terminar, responde lo que se pide.

- ¿Qué medidas tomaste como base para poder reproducir los triángulos? Se espera que el alumno explique su propia estrategia para trazar los triángulos.
- ¿Consideras que puede haber otra manera de reproducirlos? Se espera que el alumno concluya que sí hay más maneras, relacionando de manera proporcional los lados correspondientes.

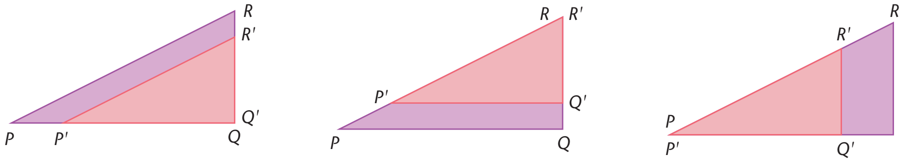
Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

Justifica tu respuesta. El alumno deberá explicar cómo se establece correctamente una relación proporcional entre los lados de dos triángulos semejantes.

c) En tu cuaderno, traza un triángulo de un tamaño intermedio entre los dos triángulos dados.
   - ¿Qué estrategia utilizaste para trazarlo? Medirlo con la regla.
   - ¿Qué medidas utilizaste? 4 y 2
   - ¿Cómo puedes comprobar que efectivamente sus dimensiones son proporcionales y sus ángulos iguales a los otros dos? Por uno de los lados

2. En las siguientes figuras se ha superpuesto la imagen sobre el triángulo original haciendo coincidir, en cada caso, el vértice de cada uno de los ángulos.



a) Observa y responde.
   - ¿Cómo son entre sí los lados de los triángulos que se encuentran opuestos al ángulo común? Paralelos
   - ¿Consideras que al superponer dos triángulos que tienen la misma forma y hacer coincidir uno de sus vértices siempre quedarán sus lados paralelos? Sí
   - Explica tu respuesta. Si tienen la misma forma al alinear dos de sus lados, también se alinea el tercero.
   - ¿Cómo determinarías la razón o constante de proporcionalidad? Por medio del cociente entre los lados homólogos.
   - ¿De qué manera comprobarías que es correcta? Obteniendo la constante para cada lado, la razón debe ser la misma.
   - ¿Cómo puedes utilizar este dato para construir un triángulo que sea diferente a los triángulos dados? Tomando las dimensiones de un triángulo y utilizando una razón diferente.
   - ¿La razón o constante de proporcionalidad que se obtiene fue constante? Sí

     ¿Por qué? Porque al comparar dos triángulos que tienen la misma forma siempre van a presentar una constante en la proporcionalidad de sus lados.

3. ¿Cuáles son las condiciones necesarias para afirmar que dos triángulos de distinto tamaño tienen la misma forma? Que se establezca una relación de proporcionalidad igual para los 3 lados de los dos triángulos.

PRACTÍCALO **Actividad 2.3**

1. Hasta ahora se han trabajado las relaciones proporcionales entre los lados de un triángulo, analicemos ahora esta relación con base en algunos cuadriláteros, analicen la siguiente situación. En una tienda de regalos de Teotihuacán tienen fotografías de la Pirámide del Sol que están a escalas proporcionales entre sí.

Qué observar

Motive a los alumnos para que comprendan la importancia de saber identificar todos los elementos de los lados proporcionales y la relación que tienen con el lado común paralelo que presentan, esto les ayudará más adelante al momento de resolver algoritmos algebraicos con triángulos como éstos.

Cómo enriquecer la actividad

Este tema tiene especial importancia para el desarrollo posterior del teorema de Tales, entre otros muchos. Verifique que el alumno comprendió las condiciones necesarias referentes a la congruencia y semejanza al comparar dos triángulos.

Recursos y materiales

En la página *Eduteka* encontrará sugerencias de trabajo y ejercicios para enriquecer el tema.

http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/lessons/quads.html

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

Qué observar

Observe que el alumno utilice de manera correcta la escala adecuada para esta actividad, y que sea claro y preciso al momento de dar respuesta a las preguntas planteadas.

a) Observen los dos ejemplos y, con los datos proporcionados, respondan lo que se pide.

2 cm

3 cm

x

9 cm

Figura 1.1 La Pirámide del Sol es la edificación más grande de Teotihuacán y una de las mayores de Mesoamérica.

- ¿Cuánto mide el lado marcado con *x*? 6 cm
- Si la mayor fuera la original, ¿cuál es la escala? 3:1
- Si la menor fuera la original, ¿cuál es la escala? 1:3
- ¿Cuál sería la razón entre los lados homólogos si las dos figuras fueran iguales? 1:1
- Se tiene una ampliación cuando la escala es: Mayor a la imagen obtenida.
- Se tiene una reducción cuando la escala es: Menor a la imagen obtenida.
- Justifiquen su respuesta. Una escala se puede utilizar para reproducir, ampliar o reducir una figura proporcionalmente.
- ¿Consideran que existe alguna otra manera de llegar al resultado? Sí

  Expliquen su respuesta. Se podría obtener una ampliación o reducción usando el equipo de geometría.

Cómo enriquecer la actividad

Que el alumno escriba en su cuaderno sus procedimientos y soluciones; que dé respuesta a las preguntas planteadas y tenga la disposición de contestar algunas otras. Se espera que lleguen a concluir cuál es la utilidad de emplear correctamente una escala.

2. Ahora tracen en su cuaderno dos cuadrados de diferente tamaño, de manera que puedan calcular la razón de sus lados que hay entre ellos.
   - ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar las medidas adecuadas? Se espera que el alumno deduzca rápidamente que en los cuadrados sus lados siempre son proporcionales.
   - ¿Cómo son entre sí las razones? Exprésenlas de manera simplificada. Se espera que el alumno explique que se necesita un solo lado para encontrar la razón entre dos figuras porque son iguales.
   - ¿Cómo comprobamos la proporcionalidad? Se espera que el alumno explique que en estos casos “se multiplica y se divide entre el mismo número”.
3. Expliquen con sus propias palabras, ¿cuál consideran que es la importancia de la proporcionalidad y justifiquen su opinión. Permita que el alumno elabore una conclusión preferentemente sobre la utilidad en su vida cotidiana.
4. ¿Cuál es la condición que se necesita para que dos rectángulos tengan la misma forma pero tamaño distinto? En el caso de los rectángulos, si es necesario establecer una relación proporcional entre sus lados al igual que se realizó para los triángulos, la diferencia radica en que en un rectángulo por tener sus lados paralelos solo se necesitan dos lados y no todos, como en el triángulo.
5. Comparen y confronten sus respuestas y con la ayuda del profesor determinen si hay alguna diferencia en la forma de obtener la razón entre sus lados y la aplicación de la proporción en cuadriláteros, en comparación con los triángulos usados en las actividades anteriores.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

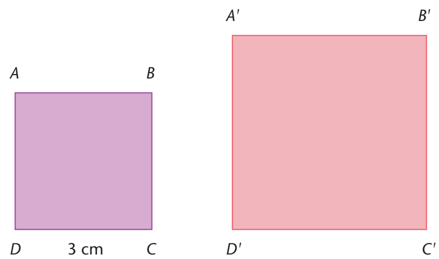
PRACTÍCALO **Actividad 2.4**

1. En una imprenta están elaborando tarjetas rectangulares y cuadradas de varios tamaños, pero desean que tengan una relación proporcional, analicen estas situaciones y respondan las preguntas.

   a) Los lados correspondientes de dos rectángulos están en razón de un medio. Si los lados del rectángulo original miden 7 cm de largo y 5 cm de ancho. Tracen en su cuaderno la figura correspondiente y respondan, ¿cuáles son las dimensiones de su imagen?

   - Expliquen cómo obtuvieron el valor de cada lado del segundo rectángulo.
     Por cada unidad de la figura original, se colocan dos unidades en la imagen.
   - ¿Analicen cómo son entre sí los ángulos correspondientes?
     Los lados son proporcionales.
   - En relación con los ángulos, ¿sucede lo mismo con todos los rectángulos?
     Sí, todos sus ángulos internos miden 90 grados, independientemente de la medida de sus lados.
   - ¿Cómo pueden determinar si los dos rectángulos efectivamente tienen la misma forma?
     Comparando la relación proporcional entre la base y la altura de cada uno.

   b) Si se toman dos de las tarjetas que tienen forma cuadrada y se sabe que están a razón de $\frac{3}{2}$, y uno de los lados del cuadrado original mide 3 cm, ¿cuánto miden los lados de la otra tarjeta? 4.5 cm

   - ¿Qué estrategia utilizaron para resolver esta situación? Determinando la escala
   - ¿Cuál es la relación de los lados y los ángulos entre ambos cuadrados? 1 : 1.5
   - ¿ Si un cuadrado distinto se relaciona con cualquiera de los cuadrados dados sus lados, ¿serán correspondientes sus lados? Sí
   - ¿Por qué? Un cuadrado siempre tiene la misma forma.
   - Si se agregan otros dos cuadrados de distintos tamaños y de entre todos se toman dos de manera aleatoria, ¿es posible asegurar que sus lados tienen la misma razón? Sí ¿Por qué?
     Porque su forma es la misma.

2. Comparen sus respuestas y construcciones con los de algunos de sus compañeros, y con la ayuda del profesor indiquen cuál es la relación entre los lados y la razón de cada uno.

PRACTÍCALO **Actividad 2.5**

1. Durante una clase de dibujo técnico, el profesor de Ana utilizó una figura que fue proyectada sobre una superficie cuadriculada a dos distancias distintas formando las siguientes sombras.

   a) Observen las figuras y contesten las preguntas.

   - ¿De cuántos polígonos consideran que está compuesta la figura? Permita que el alumno calcule el número menor.
   - ¿De qué polígonos se trata? Hay varias opciones, permita que el alumno determine qué polígonos son.

Qué observar

Es importante que observe que los alumnos comprendieron bien la idea de que un cuadrado, a diferencia de otros paralelogramos nunca cambia de forma, por lo tanto, siempre mantiene una relación proporcional en sus lados.

Cómo enriquecer la actividad

Permita que el alumno experimente con cuadrados de distintos tamaños, y con ello pueda elaborar una "regla general" para encontrar la escala entre dos o más de ellos, de una forma más rápida que como lo hace con los demás paralelogramos.

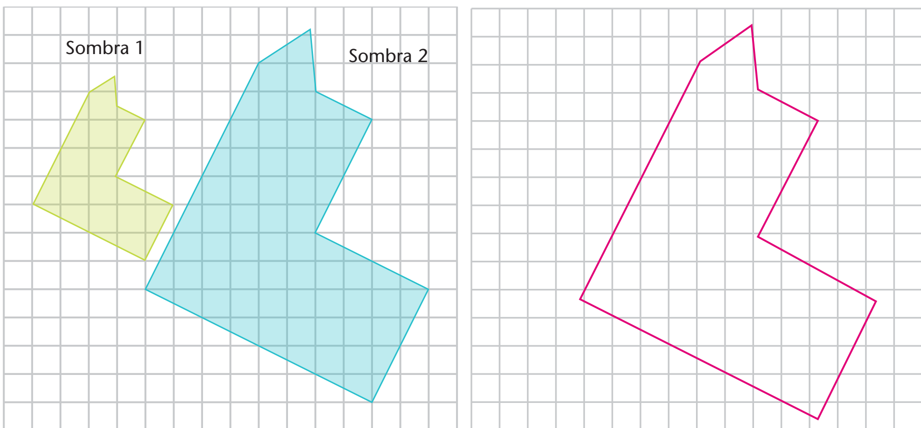
Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿De qué manera se relacionan entre si estás sombras? 1:2
- ¿Qué estrategia utilizaron para llegar a esta conclusión?
  Se compararon las longitudes y proporciones de sus lados homólogos.
- ¿Cómo es posible comprobar si la medida de sus ángulos entre ambas sombras son correspondientes?
  Tomando la medida de cada uno con un transportador.
- ¿Cuántas veces es mayor la sombra 2 en comparación con la 1? Es dos veces más grande en todo su perímetro.
  ¿Cómo determinaron esta relación? Estableciendo una proporción entre sus lados homólogos paralelos.

b) En la cuadrícula, tracen una figura que represente el triple de la sombra 1.

- ¿Qué estrategia utilizaron para trazar la figura?
  Se espera que el alumno se auxilie de la cuadrícula para trazar la nueva figura.
- ¿Cómo determinaron la ubicación del punto de inicio?
  Se espera que el alumno se auxilie de la cuadrícula para trazar la nueva figura y "determine" cómo va a ubicar el punto de inicio, para que la nueva imagen se pueda trazar.
- ¿De qué manera es posible comprobar que las tres sombras tienen la misma forma?
  Se espera que el alumno concluya que el obtener una razón constante entre todos los lados asegura que la figura es proporcional.



2. Lleven a cabo una actividad similar a ésta en su cuaderno, recorten alguna imagen de revista, fotografía o periódico y después de proyectar una sombra, tracen una que sea la mitad de su tamaño y otra que sea el doble. Si no cuentan con los medios para proyectarla, pueden simplemente marcar el contorno con un lápiz directamente sobre el papel.
3. Comparen sus resultados y con la ayuda del profesor determinen cuál es la importancia que tiene el análisis y la deducción para resolver situaciones como ésta.

30

Qué observar

El uso de la cuadrícula es muy importante para encontrar los vértices adecuados para cada figura, es conveniente que cada lado sea la diagonal de un "rectángulo imaginario", esto les permitirá encontrar unidades proporcionales a simple vista.

Cómo enriquecer la actividad

Indique al alumno que copie en su cuaderno de Matemáticas las sombras que aparecen en el libro, y posteriormente resuelvan la actividad.

Reflexión

Solidaridad es el sentimiento que nos une a los seres humanos que, en un momento dado, nos necesitan, ya sea porque están frente a un grave problema y nuestro apoyo puede ayudar a resolverlo, o cuando menos para aliviar en algo su situación.

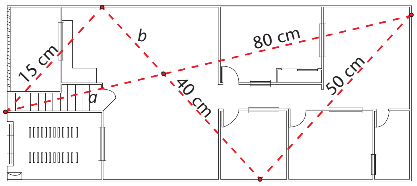
Solidarizarse con alguien equivale a hacer nuestros sus problemas, preocupaciones y anhelos. Hacemos mucho bien cuando nos esforzamos en compañía de otras personas para alcanzar una buena meta.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

LO QUE APRENDÍ

1. El señor Juan quiere colocar cámaras de seguridad en su departamento. El plano que diseñó muestra la ubicación con las medidas reales del plano. Encuentra las medidas de los lados *a* y *b*, y demuestra cuál es la relación que hay entre los dos triángulos, considera que los segmentos correspondientes entre ambos triángulos son paralelos.



- Explica cómo encontraste el valor de estos segmentos. Estableciendo una proporción para "a" y otra para "b".
- Escribe el planteamiento que se debe realizar para poder calcular los valores de *a* y *b*. 15 y 50 son los datos que junto con uno de los lados y una incógnita permiten plantear la proporción.
- ¿La posición de los triángulos permite determinar si tienen la misma forma? Sí ¿Por qué? $r = \frac{10}{3}$ o bien $r = 0.3$
- ¿Cuál es la razón entre sus lados correspondientes? Porque son semejantes.
- ¿Se presentan ángulos correspondientes? Sí ¿Por qué? Porque son semejantes.
- Si ahora utilizas alguno de los valores encontrados, *a* o *b*, ¿cómo harías el planteamiento para comprobar que el lado indicado con el número 15, en efecto, corresponde proporcionalmente al de la incógnita? Establecíendo nuevamente la proporción incluyendo uno de los valores ya sea a o b.

2. Compara y confronta tus respuestas con las de otros compañeros, y con la asesoría de su profesor establezcan, en grupo, la diferencia entre congruencia y semejanza.

Desarrolla tus habilidades

1. Para elaborar calendarios de exhibición y calendarios de mesa con base triangular se presentaron dos propuestas, la condición es que todos tengan la misma forma. Para investigar cuál de ellas es la adecuada reúnanse en parejas, resuelvan estas dos propuestas y elaboren una conclusión.
   A. La longitud de los lados de un triángulo son 125 cm y 130 cm y el ángulo comprendido entre ellos es de 45°. Otro triángulo tiene lados de 26 cm y 25 cm y el ángulo entre ellos es de 45°.
   B. Un triángulo tiene un lado de longitud 10 cm y 25 cm, y el ángulo comprendido entre ellos es de 94°. Otro triángulo tiene lados de 110 cm y 275 cm y el ángulo comprendido entre ellos es de 86°.
   a) ¿En cuál de los dos problemas anteriores es posible construir los triángulos con lados proporcionales? Con el del inciso "A".
   b) Expliquen su respuesta. En la propuesta de "B" los dos ángulos suman 180°, no es posible crear un triángulo así.
   c) ¿Cuál de las dos propuestas es la que se utilizará para elaborar los calendarios? La del inciso "A".
2. ¿Cuál es la utilidad de poder determinar la relación proporcional entre dos figuras? Permitió encontrar la mejor opción para los calendarios.

USA LAS TIC

En la siguiente página encontrarás un programa interactivo que te permitirá practicar los criterios de semejanza y comprobar los ejercicios que hagas. Contrasta lo que aprendas en esa página con lo que aprendiste en este contenido y comparte esta experiencia con tus compañeros de grupo. Con ayuda de tu profesor elabora un comentario que explique cuál fue la utilidad de visitar esta página.
http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/GeometriaInteractiva/IIICiclo/NivelIX/ConceptodeSemejanza/SemejanzadeTriangulos.htm# (Consultada el día 11 de octubre de 2012, a las 12:37 horas).

Qué observar

El alumno debe deducir con cierta facilidad que los triángulos son congruentes, esto no basta, es necesario que reconozca en éste y en otros casos, cuál es el criterio de congruencia que se está considerando en este planteamiento.

Cómo enriquecer la actividad

Motive a sus alumnos para desarrollar procesos deductivos, fomente el hábito de deducir y obtener conclusiones con la intención de plantear soluciones o encontrarlas directamente, el razonamiento abstracto es muy importante para desarrollar actividades como ésta.

Curiosidades, acertijos y más

Puede utilizar el siguiente problema para reforzar lo estudiado hasta este momento.

Las medidas respectivas de los lados de un triángulo son 3 cm, 5 cm y 6 cm. Si el más corto de los lados de otro triángulo semejante mide 4 cm, encuentre la medida de cada uno de los otros dos lados. Se puede ayudar haciendo el dibujo de los triángulos, asignándoles las medidas correspondientes.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Es conveniente que a la hora de analizar se comparen los segmentos para verificar su congruencia. Pida a algunos alumnos que calquen y recorten cada segmento para así poder, por superposición, comparar su congruencia.

Cómo enriquecer la actividad

La exposición de los procedimientos empleados y la comparación de la figura obtenida, permitirá que los alumnos refuercen o recuperen conocimientos y habilidades trabajadas en cursos anteriores.

Cómo enriquecer la actividad

Indique a los alumnos que el triángulo que deben reproducir en la actividad 3.1 lo realicen en su cuaderno de matemáticas.

Recursos y materiales

En la página virtual de la *Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales*, en su sección de geometría, encontrará la actividad llamada **Triángulos congruentes**, la cual le será de utilidad para enriquecer su clase.

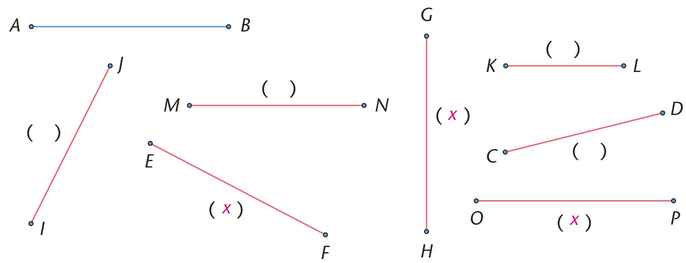
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_165_g_1_t_3.html?open=instructions

Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 3	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

ACUÉRDATE DE...

1. Observen el siguiente conjunto de segmentos, éstos representan la medida de distintas agujas de canevá producidas en una fábrica; se requiere encontrar aquellos que sean idénticos al *AB*, encuentren cuántos segmentos son congruentes al $\overline{AB}$ y colóquenles una marca en el paréntesis correspondiente.



- ¿Qué segmentos son congruentes con $\overline{AB}$? $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ y $\overline{OP}$.
- ¿Describan de qué manera lo determinaron? Utilizando una regla
- Nombren qué instrumentos del juego de geometría utilizaron para determinarlo? Regla o compás.
  ¿Por qué? Con ambos instrumentos es posible determinar cuáles segmentos miden lo mismo.
- ¿Existe alguna otra manera de determinar la igualdad entre los segmentos?
- Expliquen su respuesta. Permita que los alumnos busquen, o diseñen, sus propias estrategias para responder esta pregunta.

2. Contrasten sus respuestas con las de otros compañeros de grupo y comparen la estrategia que siguieron para encontrar esta congruencia. Con ayuda del profesor examinen cada una y determinen la que consideren más adecuada.

PRACTÍCALO

Actividad 3.1

En grados anteriores aprendieron a utilizar el juego de geometría para reproducir figuras geométricas sencillas, como los polígonos. Los datos para reproducir una figura pueden ser de distintos tipos, el más sencillo es reproducir una figura idéntica a otra dada.

1. Reproduzcan en el espacio de la derecha el siguiente triángulo. Asegúrense de que la figura sea la misma y de que las medidas coincidan totalmente. Encuentren una forma de comprobar que dichos triángulos son congruentes.

Bitácora pedagógica

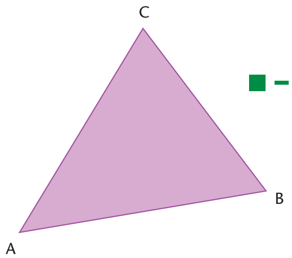
BLOQUE 1

a) Expliquen cuál es la estrategia que utilizaron para construir el triángulo. Permita que los alumnos la expliquen y comparen con las de sus demás compañeros.

b) ¿Qué instrumentos de su juego de geometría utilizaron? Regla, compás y transportador.

c) Si trazan una línea horizontal que pase por los vértices del triángulo original, ¿coincide con los vértices del triángulo que trazaron? Sí

- ¿Por qué ocurrió esto? Depende de la respuesta y conclusiones del alumno.



d) ¿Consideran que hay alguna otra forma de reproducir esta figura? Sí

- Expliquen su respuesta. Depende de las respuestas y conclusiones del alumno.

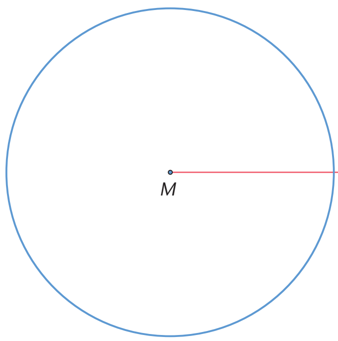
2. Comparen su triángulo congruente con el de los otros compañeros, y con la ayuda del profesor analicen las estrategias que utilizaron y determinen, ¿cuál es la que consideran más adecuada?

PRACTÍCALO

Actividad 3.2

1. En la siguiente figura, el segmento $\overline{MN}$ mide 6 cm y el radio de la circunferencia, con centro en M, mide 4 cm.

a) Elijan tres puntos de la circunferencia que no sean **colineales** con los puntos M y N (que pertenezcan a la misma recta), y denótenlos como P_1, P_2 y P_3, respectivamente.



Glosario

Colineal. Se refiere a dos o más puntos que se encuentran sobre una misma línea.

En esta sección las medidas pueden ser muy variables, dependen de la ubicación que dé cada alumno.

- Tracen el triángulo Δ MNP$_1$, ¿cuánto miden los lados diferentes a $\overline{MN}$?

$\overline{NP_1}$ = 2.3 $\overline{MP_1}$ = 3

- Tracen el triángulo Δ MNP$_2$, ¿cuánto miden los lados diferentes a $\overline{MN}$?

$\overline{NP_2}$ = 6.2 $\overline{MP_2}$ = 3

- Tracen el triángulo Δ MNP$_3$, ¿cuánto miden los lados diferentes a $\overline{MN}$?

$\overline{NP_3}$ = 5.4 $\overline{MP_3}$ = 3.3

- ¿Los triángulos que trazaron, son iguales o distintos? ¿Por qué? Son distintos, porque no tienen la misma forma.

Qué observar

Al momento de utilizar el equipo de geometría, la precisión depende de las condiciones del equipo y de la habilidad de quien hace los trazos. Ponga especial atención a la forma en cómo manipulan el equipo de geometría y en las condiciones en que éste se encuentra.

Cómo enriquecer la actividad

Esta actividad es reflexiva, el alumno deberá comprender en qué influye que un punto en una circunferencia determine la longitud de dos lados del triángulo que forma con el lado común, puede motivar esta reflexión con preguntas sobre el esquema planteando situaciones distintas.

Curiosidades, acertijos y más

Sesostris… dividió las tierras de Egipto entre sus habitantes… Si el río se llevaba una parte de la porción asignada a un hombre… el rey enviaba a otras personas para examinar y determinar, por medio de una medición, la extensión exacta de la pérdida… a partir de esta práctica, creo yo, es como se llegó al conocimiento de la geometría en Egipto, en primer lugar, donde pasó más tarde a Grecia.

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

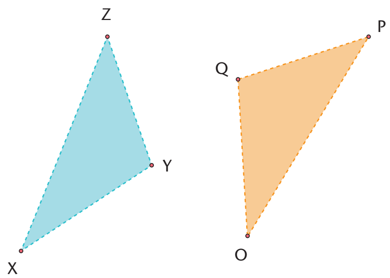
- ¿Qué condición se tendría que cumplir para que al menos dos triángulos tuvieran la misma forma? Que tengan un vértice "simétrico" sobre la circunferencia.
- ¿Sería posible que los tres triángulos tuvieran la misma forma? Justifiquen su respuesta. No es posible, solamente puede haber dos triángulos con la misma forma.
- ¿En qué influye que los tres puntos se deban colocar sobre la circunferencia para que los tres triángulos fueran iguales, aunque estén en distinta posición? Al colocarse un vértice sobre la circunferencia se determinan dos lados del triángulo, por lo tanto, no es posible que existan más de dos iguales.

2. Comparen sus triángulos con los de otros equipos y con la asesoría de su profesor expliquen si se pueden colocar más de dos puntos en la circunferencia para encontrar triángulos que sean congruentes entre sí.

PRACTÍCALO

Actividad 3.3

1. En la actividad anterior analizaron triángulos con algunos lados comunes, ahora observen el triángulo ΔXYZ y el $\Delta\, OPQ$, analícenlos y con base en las conclusiones de la actividad anterior contesten lo que se les indica.
   - ¿Cuál es la relación entre los segmentos que forman los lados de ambos triángulos? Son iguales, solo están en distinta posición.
   - ¿Es posible determinar algún tipo de correspondencia entre ellos? Sí Expliquen por qué. Porque sus tres lados correspondientes tienen la misma medida.
   - Entonces, ¿existe alguna relación de congruencia o semejanza entre ellos? Justifiquen su respuesta. Son congruentes, porque las medidas de sus ángulos y lados son las mismas.



   - ¿Qué características presentan los ángulos internos al contrastar ambos triángulos? Tienen la misma medida y corresponden claramente entre ambos triángulos.
   - ¿De qué manera se puede establecer una definición formal para explicar la relación entre los ángulos internos de los dos triángulos? Si dos triángulos tienen sus ángulos internos iguales, entonces es posible afirmar que tienen la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño.
   - ¿Qué procecimiento utilizaron para establecer la relación entre los lados? Es posible tomar las medidas con una regla o bien determinar la igualdad con un compás.
   - ¿Qué estrategia utilizaron para determinar la relación entre los ángulos internos? La manera más sencilla es medir los ángulos con un transportador y compararlos.
   - ¿A qué conclusión pueden llegar después de contrastar y analizar ambas figuras? Para determinar si dos triángulos son congruentes, es necesario conocer la medida de sus tres lados o bien dos de ellos y el ángulo comprendido entre estos, también es posible si se conoce un lado y los ángulos de sus extremos.

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, y con la asesoría de su profesor determinen las condiciones de congruencia entre dos triángulos y expliquen de forma breve, ¿cuál es la estrategia que consideran más adecuada para demostrar que efectivamente son congruentes entre sí?

34

Qué observar

Es importante que en esta sección verifique que el alumno está consolidando el concepto de congruencia y que no se confunde con el de semejanza; es conveniente que el alumno pueda explicar cuál es la diferencia con sus propias palabras.

Cómo enriquecer la actividad

Puede complementar la sesión si utiliza material didáctico, por ejemplo un tangram, un geoplano o recursos electrónicos como la PC y un proyector. Busque ejemplos afines al alumno y de su vida cotidiana. La idea es que el alumno pueda comprender la gran variedad de usos y aplicaciones que tiene la congruencia en la vida diaria.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

Para tener en cuenta

En la actividad anterior trabajaste con el criterio de congruencia de triángulos LLL. Para denotar que dos triángulos son congruentes se utiliza el símbolo ≅, por lo que $\Delta ABC \cong \Delta OPQ$, se lee, “el triángulo *ABC* es congruente con el triángulo *OPQ*”.

Si dos triángulos poseen dos lados correspondientes iguales y el ángulo entre ellos es igual al ángulo entre los correspondientes, entonces se dice que son congruentes. Éste es el segundo criterio para la congruencia de triángulos y se denota como LAL (Lado-Ángulo-Lado).

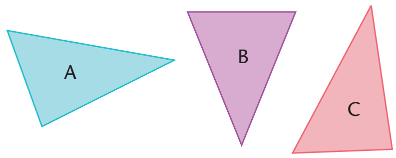
Cuando dos triángulos poseen dos ángulos correspondientes iguales y el lado común a dichos ángulos mide lo mismo que ambos triángulos, entonces se dice que éstos son congruentes. Éste es el tercer criterio para la congruencia de triángulos y se denota por ALA (Ángulo-Lado-Ángulo).

PRACTÍCALO

Actividad 3.4

1. Lean y analicen la siguiente situación. Contesten lo que se les pide.

   a) Para hacer los banderines de una escuela se requiere que los triángulos tengan la misma forma y el mismo tamaño. De los siguientes triángulos dos de ellos tienen un lado de 5 cm y otro de 3 cm, ambos tienen a su vez un ángulo de 60° comprendido entre estos dos lados.



   - ¿Cuál de los triángulos anteriores son congruentes entre sí? A y C
   - Expliquen la estrategia de cómo lo determinaron. Es posible ubicar el ángulo de 60° sobre los triángulos A y C utilizando un transportador, además, el triángulo B se ve que claramente tiene forma distinta.
   - ¿Los triángulos A y C son congruentes? Sí ¿Por qué? Porque tanto sus lados como sus ángulos tienen la misma medida.
   - ¿Y los triángulos B y C? Los triángulos B y C no son congruentes
   - ¿Cuáles son los triángulos que se deben seleccionar para hacer los banderines? A y C

   b) Arturo y Luis quieren hacer propuestas distintas; a partir de los datos que se proporcionan, construyan los triángulos en su cuaderno y compárenlos con los de los demás equipos.

   Arturo: lados: 4 cm y 3 cm, ángulo entre lados: 90°

   Luis: 2 lados de 6 cm cada uno, ángulo entre lados: 45°

   - ¿Qué instrumentos de su juego de geometría utilizaron? Regla y transportador
   - Comparen sus triángulos con otros equipos, ¿son o no congruentes? No
   - Si rotaran cada figura 45°, ¿se mantiene la congruencia de ambos triángulos? No hay congruencia.

     ¿Por qué? Porque el primero es un triángulo rectángulo escaleno y el segundo es un isósceles.

2. Comparen sus respuestas y construcciones con otros equipos, con la asesoría de su profesor comenten por qué si dos triángulos tienen lados cuyas medidas son iguales que el ángulo comprendido entre ellos, necesariamente son congruentes.

Qué observar

Esta actividad tiene que ver con la identificación de triángulos congruentes, con base en sus criterios, y ya que se formalizaron éste es otro acercamiento a las condiciones que se requiere para que dos triángulos sean congruentes.

Cómo enriquecer la actividad

Pídales que verifiquen por superposición si los triángulos son congruentes; sobre todo mantenga la atención en tres triángulos, ya que las condiciones están pensadas para que el alumno observe y deduzca con atención basándose en condiciones muy similares, pero no iguales.

Bitácora pedagógica

Qué observar

En esta actividad el análisis de las condiciones, la deducción y las conclusiones del alumno son el principal elementos. Verifique que sus planteamientos están justificados y son correctos y en su caso oriéntelos para corregir sus errores.

Cómo enriquecer la actividad

Para encontrar el resultado, los alumnos deben valerse de procedimientos y conocimientos que ya tienen, procure utilizar el lenguaje matemático adecuado y que compartan sus procedimientos de solución, sobre todo en cuanto a la manera que encontraron para determinar la medida de los lados y del tercer ángulo.

Reflexión

Pida a los alumnos que reflexionen acerca del siguiente pensamiento: "Si le das pescado a un hombre hambriento, le nutres durante una jornada. Si le enseñas a pescar, le nutrirás toda su vida" (Lao Tsé).

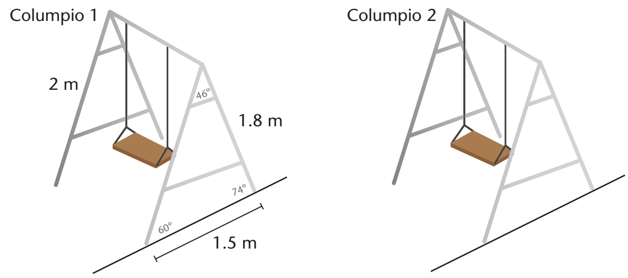
Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 3.5

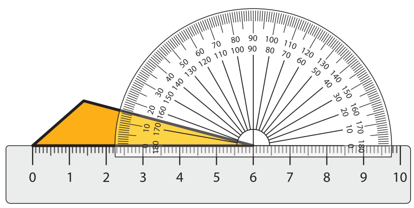
1. Lean con atención la siguiente condición, realicen y contesten lo que se les indica.

   a) En un parque se quiere poner otro columpio al lado del que ya se está. Para que se vea bien y sea seguro, se necesita que sea igual al anterior, observen la imagen y contesten las preguntas.



   - Para elaborar el nuevo columpio, ¿cuáles de las 6 medidas indicadas son más útiles y permiten construir otro igual? Los lados que forman los triángulos y el ángulo de la parte superior.
   - ¿Cuáles son los datos que tomaron? 2 m, 1.8 m y el ángulo superior de 46°.
   - ¿Cuál es la cantidad mínima de datos necesarios para poder realizar esta construcción? Tres

   b) Apliquen la estrategia que utilizaron y ahora construyan un triángulo de manera que dos de sus ángulos sean de 40° y 15°, respectivamente y que el segmento de la base del triángulo tenga una medida de 6 cm.

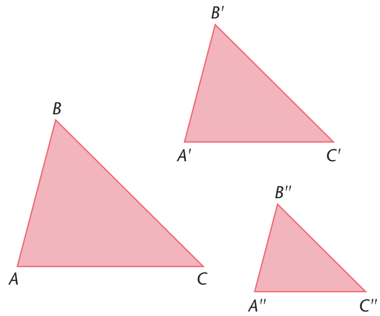


   - ¿Cuánto miden los otros dos lados? 1.9 y 4.7 ¿Cuánto debe medir el tercer ángulo? 125°
     ¿Por qué? Porque la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es 108°.

2. Así como en las bases de un columpio, en la vida cotidiana hay muchas cosas que utilizan triángulos. Ahora estudiaremos algunos de manera específica. En una hoja de papel diseñen y corten tres triángulos de diferente tamaño, pero con la misma forma. Realicen la actividad y luego utilicen sus propios triángulos para validar sus conclusiones. En cada uno de los siguientes triángulos, anoten las medidas correspondientes de los ángulos internos y de sus lados.
   - Expliquen de qué manera se puede establecer la relación entre las medidas de los ángulos internos de los tres triángulos. Como los tres tienen la misma forma, entonces sus ángulos miden lo mismo, independientemente de que su tamaño sea distinto.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1



- ¿Qué estrategia utilizaron? Medir lados y ángulos con regla y transportador respectivamente.
- ¿De qué manera es posible comprobar esta relación? Por medio de las proporciones de los lados correspondientes.
- ¿Entonces se puede decir que los tres triángulos son congruentes entre sí? Sí

  ¿Por qué? Porque son semejantes, tienen la misma forma pero distinto tamaño.
- ¿Cuál es la estrategia que se puede usar para determinar si dos triángulos son congruentes, si sólo se tiene como dato un lado y los ángulos comprendidos en sus extremos? Comprobando si el otro triángulo tiene las mismas medidas en el lado y ángulos correspondientes.

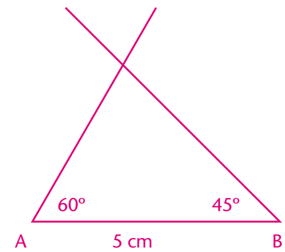
3. A partir de los datos que se dan en cada inciso, construyan los triángulos y compárenlos con los que construyeron otros compañeros cercanos.

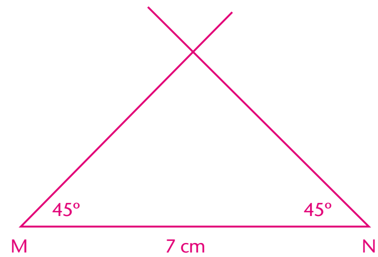
   a) Lado $\overline{AB}$ = 5 cm

   Ángulos adyacentes a $\overline{AB}$: 60° y 45°

   b) Lado $\overline{MN}$ = 7 cm

   Ángulos adyacentes a $\overline{MN}$: 45° y 45°





- ¿Cuál es la longitud de los lados del triángulo *a*? 5 cm, 4.48 cm y 3.66 cm
- ¿Cuál es la amplitud de su tercer ángulo? 75°
- ¿Cuál es la longitud de los lados del triángulo *b*? 4.45 cm
- ¿Cuál es la amplitud de su tercer ángulo? 90°
- ¿En qué son congruentes ambos triángulos? Dos de sus ángulos tienen el mismo valor de 45°.
- ¿Será posible identificar si un triángulo es congruente, conociendo únicamente los ángulos internos de ambos? No ¿Por qué ocurre esto? Porque los ángulos solo permiten determinar si tienen la misma forma, no el mismo tamaño.
- Si se tiene un lado y dos ángulos de un triángulo, pero uno de los ángulos no es adyacente a alguno de los extremos del lado conocido, ¿es posible identificar otro triángulo que sea congruente? Expliquen su respuesta. No sería posible determinar de esa manera la medida de los lados faltantes.

4. Comparen sus repuestas y sus triángulos con otros compañeros, con la asesoría de su profesor, comenten por qué si dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes iguales, no se puede garantizar que sean congruentes.

Qué observar

En la actividad anterior, el alumno tuvo la libertad de hacer sus construcciones a partir de sus recursos. Ahora conviene que las haga utilizando regla y transportador, que los alumnos ejecuten de manera correcta cada trazo.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que expongan la manera en cómo realizaron sus construcciones, esto podrá servir para verificar los resultados de todo el grupo.

Recursos y materiales

En la página de *Habilidades Digitales para Todos* encontrará un interactivo que le ayudará a reforzar su clase. Pida que lo revisen y realicen las actividades que se proponen.

http://www.hdt.gob.mx/new_media/secundaria_3/matematicas_b2/oda_2545_10034/recurso/

Bitácora pedagógica

Qué observar

Deje en total libertad al alumno, observe que atienda a las instrucciones y que utilice de manera adecuada los instrumentos de medición.

Cómo enriquecer la actividad

No deje que solamente resuelva, tal vez convenga que se refuercen los criterios de congruencia y se establezca una discusión grupal en cuanto a si las figuras se apegan o no a estos criterios.

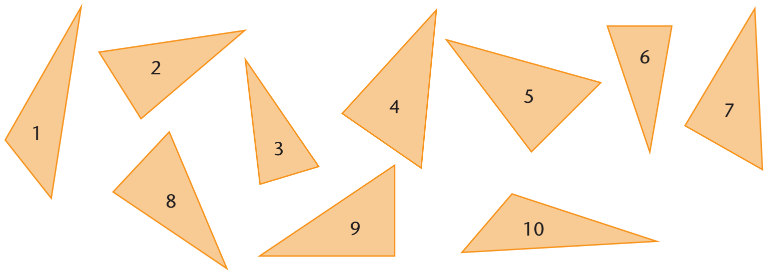
Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 3.6

1. Durante una práctica en la clase de matemáticas, Alicia se enfrentó a un reto que planteó el profesor, donde debía mostrar su capacidad de análisis y deducción para identificar figuras. Ayuden a Alicia con su problema, para ello, analicen los siguientes triángulos.

   a) Hay 5 parejas de triángulos congruentes entre ellos, determinen cuáles son. Apoyénse en todo lo que han aprendido hasta ahora y, de ser necesario, utilicen su juego de geometría para medir los lados y los ángulos.



   • Registren en la siguiente tabla los triángulos que son congruentes.

Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3	Pareja 4	Pareja 5
1 con 10	2 con 5	3 con 6	4 con 9	7 con 8

   • ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar las parejas? Se pueden medir los lados y compararlos, y auxiliarse de las medidas angulares.

   • De los criterios de congruencia y semejanza, ¿cuáles les resultaron más útiles? LLL

   • ¿Encontraron triángulos que fueran semejantes? Sí ¿Por qué ocurrió esto? Algunos tienen la misma forma, pero difieren ligeramente en su tamaño.

2. Compartan sus resultados con algunos de sus compañeros y, con la ayuda del profesor, argumenten si existen diferentes procedimientos para utilizar el juego de geometría y los criterios de congruencia y semejanza al comparar dos triángulos.

Para tener en cuenta

Semejanza de triángulos

- Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.
- Si un segmento de recta une dos lados de un triángulo y es paralelo al tercer lado, los triángulos que se forman son semejantes.
- Criterio 1: dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos correspondientes iguales.
- Criterio 2: dos polígonos son semejantes si tienen sus lados correspondientes proporcionales.

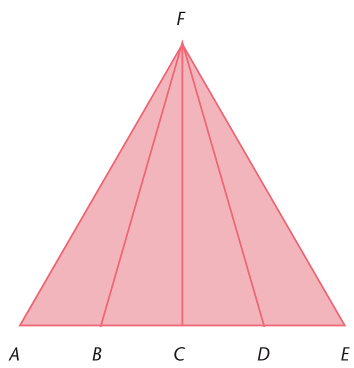
Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

PRACTÍCALO

Actividad 3.7

1. Durante la olimpiada de mátemáticas de una primaria presentaron una figura compuesta por varios triángulos y pidieron a algunos de los alumnos que dijeran cuántos triángulos se pueden formar, cuáles son congruentes y cuáles semejantes. Para determinarlo, observen la figura mostrada y contesten las preguntas.



   a) ¿Cuántos triángulos en total se forman en esta figura? 10
   - ¿Cuántos triángulos hay que sean congruentes entre sí? 8

     Regístrenlos. 1 con 4, 2 con 3, 1 + 2 con 3 + 4, 1 + 2 + 3 con 2 + 3 + 4 mente en su tamaño.
   - ¿Es posible encontrar triángulos que sean semejantes? No

     Justifiquen su respuesta. Porque todas las parejas de triángulos encontradas tienen los mismos ángulos y lados, por lo tanto, son congruentes. 1 + 2 + 3.
   - ¿Es posible formar triángulos congruentes o semejantes combinando más de un triángulo a la vez? No

     Justifiquen su respuesta. Es posible formar triángulos congruentes, pero semejantes no porque todos tienen las mismas dimensiones.
   - Entonces, ¿cuántos triángulos con diferentes dimensiones se pueden obtener? 5

   b) Analicemos ahora algunos de manera específica.
   - ¿Con qué triángulo es congruente el Δ *AFB*? Con el triángulo EDF.
   - ¿Con qué triángulo es congruente el Δ *BFC*? Con el triángulo DCF.
   - Continuando con este esquema, ¿cuántas parejas más de triángulos congruentes pueden encontrar? ACF con ECF y DAF con EBF.
   - Fue necesario utilizar el juego de geometría para resolver esta actividad? No

     ¿Por qué ocurrió esto? Porque no es necesario tomar medidas.
   - ¿Qué criterio o criterios fueron los que utilizaron para determinar la congruencia de los triángulos? Principalmente LLL, aunque también se pueden utilizar los otros dos.
   - ¿Qué datos les fueron más útiles: las medidas de los lados o las medidas de los ángulos? Los lados

     Justifiquen su respuesta. Porque claramente se observa que es una es un triángulo equilátero y los triángulos son simétricos.

2. Comparen sus resultados con los de otro equipo, y con la ayuda del profesor comenten qué características deben considerarse para que puedan aplicar los criterios de congruencia de triángulos en una figura compuesta.

Qué observar

Esta actividad fue diseñada con la pretensión de que el alumno concrete sus aprendizajes a través de la justificación de cada situación que resuelva. Conviene que el alumno se analice de manera grupal, diríjalo o que lo haga alguno de sus compañeros. También que resuelva caso por caso y que de manera continua emple los conceptos adquiridos para argumentar y justificar sus respuestas.

Cómo enriquecer la actividad

Que cada uno de los ejercicios sean expuestos de manera amplia por algunos alumnos, dando la posibilidad de aumentar en las posibles variaciones o implicaciones de las propias situaciones. Dé apoyo a los expositores y haga preguntas al grupo, las cuales respalden teóricamente las situaciones resueltas.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Utilice estas situaciones para que el alumno se autoevalúe. No se trata de una prueba, concientícelo de la importancia que tiene el saber lo que ha aprendido, lo que no ha aprendido y lo que le falta por aprender. Motívelo a ser honesto consigo mismo, a aceptar su realidad como una persona responsable de su propia formación.

Cómo enriquecer la actividad

Que el alumno cree situaciones que se presenten en su vida cotidiana, pida que justifiquen la forma cómo lo abordarían para que el resultado que se obtenga sea satisfactorio.

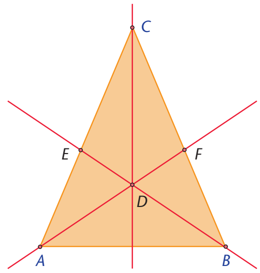
Reflexión

El físico Albert Einstein (1879-1955), que revolucionó la física clásica el siglo pasado, afirmaba: "Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber". Pida a los alumnos reflexionar y mencionar algunos casos en que, para ellos, esta frase pueda aplicarse.

Matemáticas 3. Por competencias

LO QUE APRENDÍ

1. Se construyó un triángulo isósceles, y cada uno de sus ángulos se dividió a la mitad. Analiza la imagen y responde lo que se te indica.



- ¿Cuántos triángulos individuales se formaron? 6
- ¿Cómo son esos triángulos entre sí? Iguales por pares.

  ¿Por qué? Porque la línea del vértice C es un eje de simetría del triángulo, por lo tanto, se forman tres triángulos a cada lado "congruentes" a los del lado opuesto.
- ¿Cuántos triángulos son congruentes? 3
- ¿Qué es lo que ocasiona la formación de estos triángulos congruentes? Que la bisectriz de C actúa como eje de simetría.
- En el punto *D* se unen 6 ángulos en el mismo vértice, ¿qué relación puedes encontrar entre ellos y los triángulos a los que pertenecen? Que los ángulos opuestos son iguales y D es un vértice común de los 6 triángulos.
- Considerando como base un lado y los dos ángulos de sus extremos para cualquier triángulo, ¿qué segmento consideras que tienen en común? CD Justifica tu respuesta Esta línea es común para 4 triángulos, faltarían otros dos para que fuera común para todos.

2. Analiza cada figura y los triángulos de color que se forman, y explica si estos triángulos son congruentes entre sí.

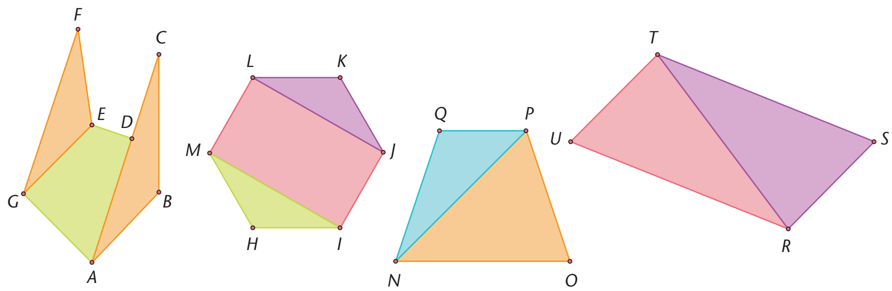


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿En qué figuras los triángulos formados cumplen con el criterio de congruencia de triángulos LLL? En la figura 1, en la 2 y en la figura 4.
   - Indica cuáles son los triángulos. EGF-BAC, IHM-JLK, RUT-RTS

b) ¿En cuáles figuras los triángulos formados no cumplen con el criterio de congruencia de triángulos LLL? Únicamente en la figura 3.
   - Indica cuáles son los triángulos. Los triángulos NQP y ONP no cumplen con el criterio LLL.

3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros, y con la asesoría de su profesor elaboren una explicación que indique por qué es posible considerar al criterio *LLL* como cierto para todos los triángulos congruentes.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

Desarrolla tus habilidades

1. Las actividades manuales matemáticas siempre ayudan a mejorar la motricidad fina, toma una hoja en blanco y con ella, construye un triángulo cuya amplitud de sus ángulos internos sea 60° y divide a la mitad sus tres ángulos internos.
   a) Con base en tu análisis, contesta y demuestra lo que se te indica.
   - ¿Cómo son los triángulos que se forman? Semejantes
   - ¿Por qué ocurrió esto? Porque todos los lados y los ángulos son iguales, entonces los triángulos internos también lo son.
   - ¿Se cumplen todos los criterios de congruencia? Sí
   - ¿Cómo lo determinaste? Los criterios de congruencia se pueden utilizar para comparar dos triángulos cualesquiera.
   - Justifica tu respuesta.
     El propósito de los criterios de congruencia es determinar de manera precisa si dos triángulos tienen exactamente las mismas dimensiones en sus lados y en sus ángulos.
   - ¿Sí se trazaran las bisectrices de un triángulo escaleno se obtendrían triángulos congruentes? No
     ¿Por qué? Porque como todos sus lados y sus ángulos tienen medidas distintas, los triángulos formados son todos distintos.
2. Ahora construye un cuadrado y un rectángulo de un tamaño que consideres conveniente, y traza una de sus diagonales en cada uno, responde:
   - ¿Los triángulos internos que se forman en cada figura son semejantes o congruentes? Congruentes
   - ¿Cuál es el criterio con que puedes demostrarlo?
     Es posible utilizar cualquiera de los 3 criterios para demostrarlo.
   - ¿Ocurrirá esto mismo para cualquier cuadrilátero, como un trapecio o trapezoide? No ¿Por qué ocurre esto?
     Los trapezoides no son paralelogramos, en todo caso únicamente ocurriría con el trapezoide isósceles.
   - ¿Consideras que es posible determinar la congruencia de los triángulos internos de cualquier polígono regular?
     Sí es posible, ya que ese es el propósito de los criterios de congruencia y semejanza de los triángulos.
3. Compara tus respuestas y construcciones con los de otros compañeros, y con la asesoría de del profesor, comenten si se podrían obtener triángulos congruentes al trazar las bisectrices de polígonos regulares.

USA LAS TIC

Para que conozcas más acerca de los criterios de congruencia de triángulos visita la siguiente página: http://tutormatematicas.com/GEO/Triangulos_semejantes.html (Consultada el día 5 de octubre de 2012, a las 12:07 horas); aquí podrás hacer más ejercicios que te permitirán enriquecer tus conocimientos y contrastarlos con lo que ya sabes. Después de visitarla, comenta la experiencia en clase y, con la ayuda del profesor, determina: ¿cómo puedes aplicar en tu vida cotidiana lo que aprendiste?

Qué observar

Observe que los alumnos al realizar el doblado de papel efectivamente el ángulo del interior de los triángulos sea de 60°. De ser necesario, oriéntelos para realizar esta actividad. Dé el tiempo necesario para efectuarla, recuerde que no todos los alumnos tienen desarrollada esta motricidad.

Cómo enriquecer la actividad

Puede pedirles con anticipación que usen la técnica de la papiroflexia para hacer una figura que tenga una base cuadrada, muchas veces de esta forma se marcan las diagonales que se piden en la actividad. Así desarrolla la motricidad fina de los alumnos, y al mismo tiempo se divierten.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Partimos del hecho de que el alumno ha aprendido a tabular, graficar e interpretar diversas funciones lineales y no lineales, consideremos que es un antecedente fundamental para involucrarlo a este tema.

Cómo enriquecer la actividad

Se sugiere llevar a cabo una actividad similar a ésta en el patio de la escuela, donde los alumnos puedan correr y tomar sus tiempos de manera real, para posteriormente comparar los resultados obtenidos entre ellos.

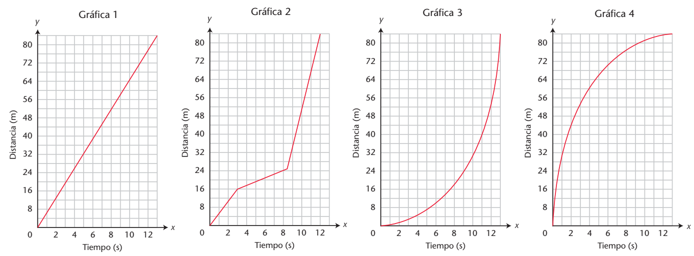
Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 4	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

ACUÉRDATE DE...

En la clase de Ciencias del ciclo anterior revisaron el tema del movimiento y llevaron a cabo cálculos de velocidad. Lean con atención la siguiente situación, observen la tabla y las gráficas y contesten lo que se les pide.

1. Luis está en tercero de secundaria, su maestro de Educación Física llevó al grupo al patio para que corran 100 m planos. Aprovechando la actividad, los alumnos decidieron graficar la distancia que recorre Luis en 2, 4, 6, 8, 10 y 12 segundos. Se obtuvieron los siguientes datos.



Tiempo (s)	Distancia (m)
0	0
2	8
4	18
6	30
8	44
10	60
12	80

a) ¿Cuál de las gráficas representa tiempo-distancia, según los valores de la tabla? ______

¿Por qué? Ninguna coincide con los valores de la tabla.

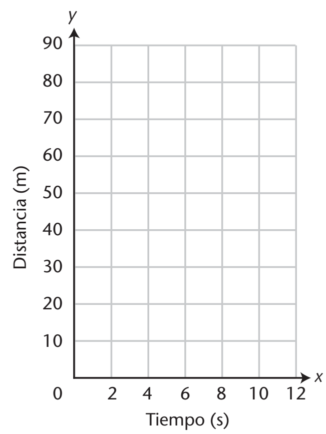
b) En el plano de la derecha, encuentren los puntos de acuerdo a la tabla de tiempo y distancia. Únanlos y compárenlos con su respuesta anterior.

- ¿Con cuál gráfica tiene similitud? Con la gráfica tres de la tabla.
- ¿Los puntos de la gráfica son proporcionales? No

  ¿Por qué? Porque la línea no es recta, es curva.
- ¿Qué distancia, aproximadamente, recorrió Luis en 5 segundos?

  24 metros
- ¿Qué tiempo transcurrió cuando había recorrido 45 m? ______

  8.24 segundos
- Expliquen cómo encontraron estos valores, si no aparecen en la tabla de datos. Es posible interpolarlos en la misma gráfica, aunque se obtengan valores "aproximados".



2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y discutan por qué se comportó la gráfica de datos de esta forma. Si éstos representan datos lineales y determinen qué factores provocaron este resultado.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

Para tener en cuenta

La gráfica referente al recorrido de Luis es una parábola, pero sólo corresponden los valores de la derecha, ya que se midió la distancia recorrida en un tiempo dado.

Cabe señalar que cuando la gráfica es una parábola, la relación que existe es cuadrática.

Esto es, que se puede presentar una relación como $y = 2x^2 + 3x - 4$, $y = 2x^2 + 3x$, $y = 2x^2 - 4$, $y = 2x^2$, etcétera, donde aparece x elevada al cuadrado, además de otros términos de grado uno y de grado cero.

PRACTÍCALO

Actividad 4.1

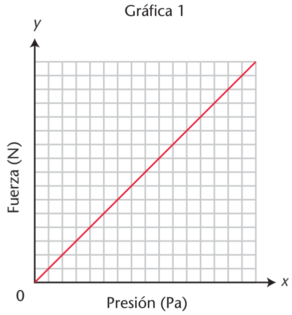
En la clase de Ciencias 2, revisaron el tema de presión, la cual se define como la fuerza que se ejerce en una unidad de área. Y está dada por la expresión $P = \frac{F}{A}$, donde F es la fuerza en **newtons**. Y A es el área cuya unidad de medida es el metro cuadrado (m^2), por lo que la unidad de presión es el pascal (Pa). Recordando dicha fórmula, analicen y resuelvan el siguente caso.

Glosario

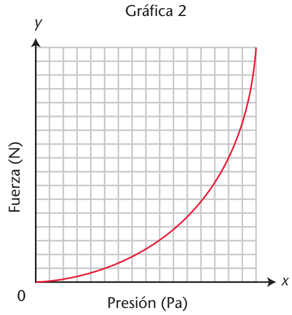
Newton. Es la fuerza que se aplica durante un segundo a una masa de un kilogramo para que ésta incremente su velocidad en un metro sobre segundo.

1. Carmen hizo un experimento en el que somete a diferentes presiones una tabla de madera de 100 cm^2: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 pascales.
   a) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la fuerza que ejerció Carmen para obtener la presión hacia la tabla de madera? La gráfica 1

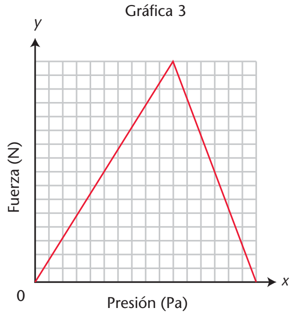
Gráfica 1



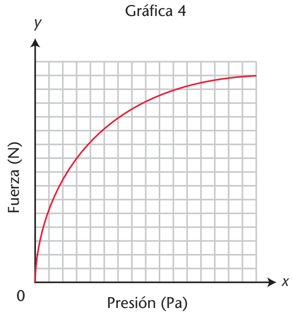
Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4



Qué observar

El ingreso del alumno al estudio de las gráficas no lineales debe ser gradual, de ninguna manera hay que forzarlo a que obtenga tal o cual gráfica con exagerada precisión.

Cómo enriquecer la actividad

Conforme avancen en la lección, aproveche para que se acostumbren a analizar y a dar significado a los elementos que contienen una expresión algebraica en relación con la gráfica que la representa.

Recursos y materiales

En la página *ThatQuiz* encontrará un simulador que le permitirá enriquecer su clase de manera interactiva.
http://www.thatquiz.org/es-7/

Bitácora pedagógica

Qué observar

En esta lección se pueden relacionar las gráficas no lineales y lineales, tome como base la actividad del inciso a) y cerciórese de que los alumnos comprenden por qué sale diferente cada gráfica.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que prepare otras fórmulas, con la intención de tabularlas y graficarlas en clase para que el alumno pueda compararlas con las que ya estudió, y de esta manera ampliar su experiencia y reafirmar los nuevos conocimientos.

Reflexión

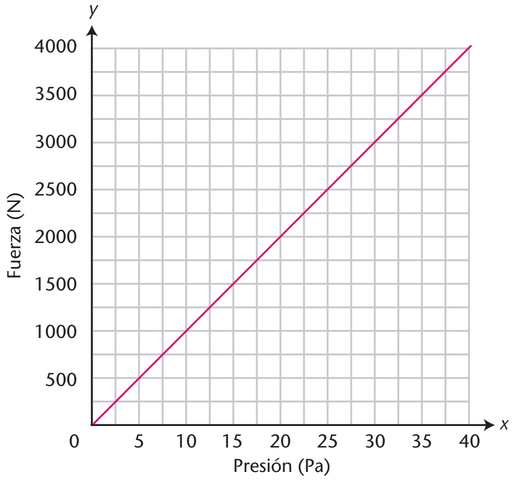
La socialización del conocimiento es importante, sin embargo, el aprendizaje es individual. Trate de que a todos los alumnos en cualquier ocasión les corresponda la responsabilidad de exponer. El desarrollo de habilidades comunicativas también es una competencia matemática.

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Qué tuvieron que hacer para encontrar la gráfica que corresponde a esta situación? Comparando los valores de la tabla con cada una de las gráficas.
- Escriban la expresión algebraica que utilizó Carmen para encontrar la fuerza. $F = 5P$
- ¿La gráfica qué eligieron es proporcional? Sí ¿Por qué? Porque representan una recta, lo que indica que los valores al aumentar o disminuir en cualquiera de sus ejes ocasiona un cambio proporcional en el otro eje.

b) Carmen quiere saber la fuerza que corresponde a la presión para cada uno de los valores de la tabla, complétala y construye la gráfica correspondiente.

Presión (Pa)	Fuerza (N)
0	0
5	500
10	1000
15	1500
20	2000
25	2500
30	3000
35	3500
40	4000



- ¿La gráfica que en un principio eligieron es igual o diferente? Igual
  ¿Por qué? Porque siempre que hay una proporcionalidad directa a la hora de graficar se obtendrá una línea recta.
- ¿Qué diferencia presenta esta gráfica con la que obtuvieron en la actividad de la sección anterior? A pesar de que las dos son rectas y tienen una relación proporcional, ésta última no es igual para las dos gráficas.
- ¿Qué presión experimenta la tabla de madera si se ejerce una fuerza de 1250 newtons (N)? 12.5 Pa
- ¿Qué fuerza se requirió para que la tabla de madera experimentará una presión de 27.5 Pa? 2750 N
- Explique cómo obtuvieron estos dos últimos resultados. Despejando tanto P como F de la fórmula de presión y sustituyendo los valores.

2. Comparen sus respuestas y la gráfica obtenida con las de otros equipos, con la asesoría de su profesor repasen cuál es la expresión algebraica con la que se obtiene una gráfica de este tipo.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

PRACTÍCALO **Actividad 4.2**

En tu clases de Ciencias 2, también revisaste las leyes de los gases, entre las cuales está la ley de Boyle, que nos dice que la presión de un gas en un sistema cerrado es inversamente proporcional al volumen del recipiente, si y sólo si la temperatura es constante.

1. Observa las figuras.

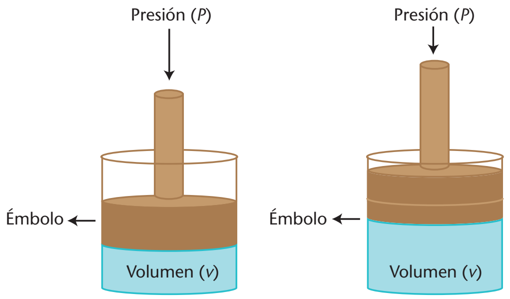


Figura 1 Figura 2

   a) ¿Cómo es el volumen en ambos sistemas cerrados? Diferente

   ¿Y la presión? Diferente

2. Se ejerce una presión de 50 Pa sobre un volumen de 100 cm^3 de gas que se encuentra en un sistema cerrado, si el volumen aumenta a 125 cm^3.

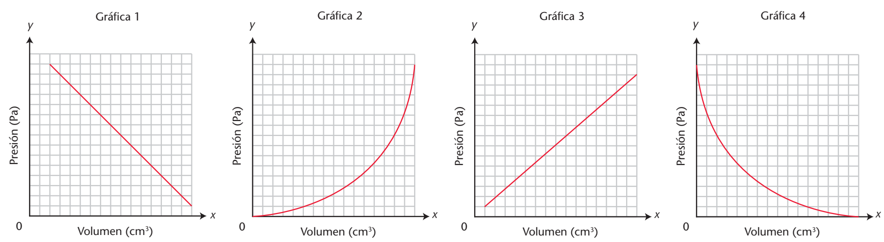
   a) ¿Cuál será la presión sobre del gas? 40 Pa

   Explica cómo encontraste el resultado. A partir de una proporcionalidad inversa.

   b) Si en el mismo sistema la presión disminuyera hasta 25 Pa, ¿cuál sería el volumen del gas? 200 cm^3

   ¿Por qué? Porque a medida que disminuye la presión aumenta el volumen.

   c) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa esta situación? La gráfica 1



Qué observar

Pida a los alumnos que investiguen la ley de los gases, propuesta por Boyle, y verifique que se realice el despeje correcto de la variable que requiere para esta situación.

Cómo enriquecer la actividad

Seleccione a uno de los alumnos para exponer cada una de las situaciones, comentando sus estrategias, y explicar de manera clara y concreta cada una de sus respuestas.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Verifique que la gráfica obtenida es acorde con los datos de la tabla. Dé el tiempo necesario para que realicen esta actividad.

Cómo enriquecer la actividad

Utilice hojas para reciclaje para que los alumnos puedan medir, trazar y cortar; así como construir cajas de diferentes dimensiones y calculen su volumen. Para comprobarlo puede utilizar arena o granos, como arroz o lentejas, u otros materiales que les faciliten obtener el resultado.

Transversalidad

Ciencias 2, Física

Verifique que los alumnos son capaces de representar situaciones de proporcionalidad con las gráficas que corresponden a un movimiento rectilíneo uniforme, y la diferencia con las gráficas de movimiento uniforme acelerado.

Matemáticas 3. Por competencias

3. Completa la siguiente tabla y realiza la gráfica correspondiente a volumen-presión.

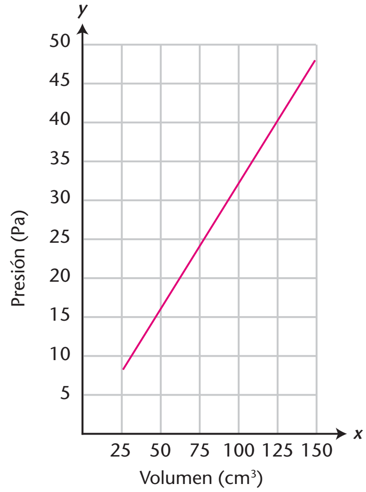
Volumen (cm^3)	25	50	75	100	125	150
Presión (Pa)	8	16	24	32	40	48
Volumen × Presión (m^3 × Pa)	200	800	1 800	3 200	5000	7 200

a) ¿Coincidió esta gráfica con la que elegiste anteriormente?
No
¿Por qué? Porque es una proporción directa y no inversa.

b) ¿Qué volumen aproximado hay en el sistema cerrado cuando la presión es de 110 Pa? 343.75 cm^3

c) ¿Qué presión aproximada hay sobre el gas que se encuentra en el sistema cuando el volumen es de 130 m^3?
41.6 Pa

d) Explica cómo encontraste estos dos últimos resultados.
Aplicando una proporción directa en ambos casos.



4. Compara tus resultados y la gráfica con los de otros compañeros, con la asesoría de su profesor comenten si todas las proporciones inversas se comportan igual al graficarse.

Para leer más

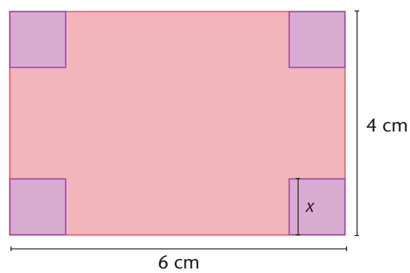
La gráfica asociada a una proporcionalidad inversa es una recta con pendiente negativa y a diferencia de la proporcionalidad directa representa que cuando un valor disminuye el otro aumenta y viceversa.

PRACTÍCALO

Actividad 4.3

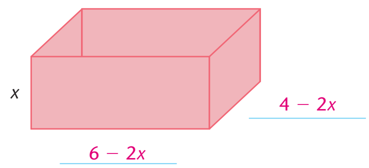
1. En una fábrica de juguetes requieren una caja para un juego de mesa, para ello deben conocer el volumen máximo de la caja.

La figura 1 representa el trazo de la caja y la figura 2 es la caja armada. Obsérvenla, analícenla y respondan lo que se les indica.



Bitácora pedagógica

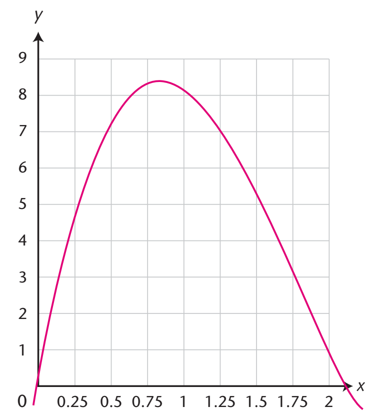
a) Escriban sobre la línea de la siguiente figura la expresión matemática del largo y ancho de la caja de cartón.



- Expliquen cómo encontraron el largo y el ancho. A cada lado se le resta $2x$ de manera lineal
- ¿Cuál es la expresión matemática que representa el volumen de la caja? $4x^3 - 20x^2 + 24x$
- En la expresión que obtuvieron, si $x = 0$, ¿cuál sería el valor de y? Cero
- Y si $x = 2$, ¿cuál es el valor de y? Cero
- ¿Qué significa esto en la situación? Significa que el eje de las x contiene dos puntos en (0,0) y en (2,0) por lo que no se trata de una línea recta.
- De acuerdo con la expresión algebraica que obtuvieron, encuentren el valor de y en la siguiente tabla.

x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75
y	4.81	7.5	8.43	8	6.56	4.5	2.18

b) Con los valores obtenidos, elaboren, en el siguiente plano, la gráfica correspondiente a esta situación.



Incluyan los valores cuando $x = 0$ y $x = 1$.

- De acuerdo con la gráfica, ¿cuál es valor máximo de y? 8.43
- Con este valor, ¿cuál es el volumen de la caja? 8.43 cm^3

2. Comparen sus resultados y la construcción de su gráfica con los de otros equipos, comenten si se podría graficar una expresión cuyo exponente de x sea cuatro (x^4).

Qué observar

Es importante que verifique que las dimensiones son acordes a los valores obtenidos en las expresiones algébricas, de esta forma darán los valores de cada uno de los lados de la caja, esto les permitirá a los alumnos tener un mejor control al momento de armar la caja.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que oriente a los alumnos en cuanto a la forma que tiene una gráfica que corresponde a una expresión cúbica, es muy posible que le cueste un poco de trabajo comprender la forma que tiene, sin embargo, si pudiera verla ampliada observaría sus puntos de inflexión y comprendería mejor su forma.

Curiosidades, acertijos y más

René Descartes (1596-1650) hizo importantes aportaciones relacionadas con la geometría plana y del espacio. Algunas de estas aportaciones se siguen utilizando en sus mismos términos hasta el día de hoy, por convenios establecidos por las sociedades matemáticas.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Es muy importante que el alumno comprenda qué es lo que representa el coeficiente de x en una expresión de primer grado, en relación con la inclinación de la recta que representa. Verifique que el alumno comprende que cuando se incrementa su coeficiente aumenta la inclinación y viceversa.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a algunos alumnos que resuelvan en el pizarrón la actividad, para que todo el grupo comparta los procedimientos de solución, además esto le permitirá resaltar los puntos importantes y aclarar dudas.

Cambiando números

Solicite a los alumnos que realicen la gráfica en su cuaderno, considerando las siguientes características: la línea verde y la naranja deben llegar al 10 en x.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

Observe que los alumnos pueden representar de manera gráfica la proporcionalidad que se presenta entre la cantidad de calorías que se consumen diariamente, mediante elaborar una dieta balanceada realizada por ellos.

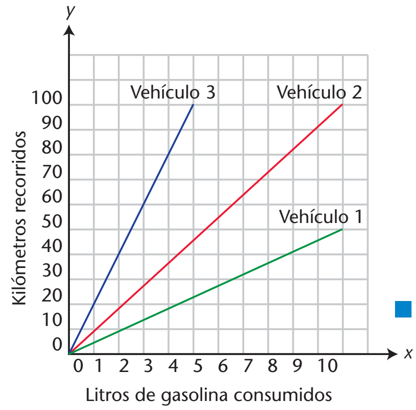
Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 4.4

1. En la gráfica mostrada se observa el consumo de combustible de tres vehículos en relación con la distancia recorrida en kilómetros.

   a) Analicen la gráfica y con base en los datos mostrados contesten las preguntas.



- ¿Cuál de los tres vehículos tiene un mejor rendimiento de combustible? 3

  Justifiquen su respuesta. Porque es el que más kilómetros avanza por cada litro consumido.
- ¿Cuál de los vehículos consume más gasolina por kilómetro recorrido? 1
- ¿Qué expresión algebraica corresponde a la recta del vehículo 1? $y = 5x$
- ¿Cómo determinaron esta expresión? A partir de la sucesión eje de las y.
- ¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente a la recta del vehículo 2? $y = 10x$
- La expresión algebraica para el vehículo 3 es $y = 20x$
- ¿Qué dato es el que cambia en estas tres rectas? El coeficiente de x.
- ¿Cuál es la relación que tienen estas expresiones algebraicas con los datos de los ejes del plano cartesiano? La relación se da en la inclinación de cada recta.
- ¿Hay posibilidades de que al resolver un ejercicio como éste, al momento de determinar la expresión algebraica que corresponde a alguna de las rectas, el máximo exponente sea 2? No

  Justifiquen su respuesta. Porque el exponente 2 no representa una recta.

   b) Con los datos de la imagen gráfica completen las tablas.

Vehículo 1	
Litros	Kilómetros
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45
10	50

Vehículo 2	
Litros	Kilómetros
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80
9	90
10	100

Vehículo 3	
Litros	Kilómetros
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100
6	120
7	140
8	160
9	180
10	200

48

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

- Al analizar las tablas anteriores, ¿es posible decir que existe una relación de proporcionalidad entre estas cantidades? Sí

  Justifiquen su respuesta. Todas son relaciones lineales, por lo tanto, son proporcionales.

2. Realicen una actividad igual a ésta, pero investiguen el consumo real de combustible de dos vehículos, por lo menos, compara tus tablas y gráficas con algunos de tus compañeros.
3. Comparen sus respuestas con las de algún equipo cercano y, con la ayuda del profesor, expliquen cuál es la relación que hay entre una expresión algebraica, la tabla que la representa y la gráfica resultante.

Qué observar

Recuerde que esta sección pretende hacer que los alumnos se acostumbren a autoevaluarse. Cuando hagan la puesta en común de los resultados, observe que las dudas se disipen y, si lo considera prudente, pida que se vayan calificando.

Para leer más

La expresión $y = x(3 - 2x)(4 - 2x)$ es conocida como *cúbica*, porque al desarrollarla el resultado es $4x^3 - 14x^2 + 12x$, la cual presenta un término al cubo, en este caso: x^3 (se lee "equis al cubo"), por lo que la gráfica asociada a esta expresión se conoce como gráfica cúbica.

LO QUE APRENDÍ

1. Un recipiente de 4 m^3 contiene gas helio a una presión de 200 kPa (kilopascal, es decir, que es igual a 1000 Pa por unidad), si se desea guardar la misma cantidad de este gas en otros 5 recipientes de diferente volumen, ¿cuál será la presión en cada uno de ellos?

   a) Completa la tabla.

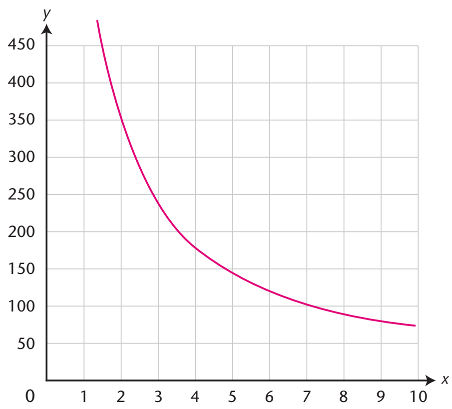
Volumen del tanque (m^3)	2	4	6	8	10
Presión ejercida por el helio (kPa)	400	200	133.3	100	80

   - Escribe la expresión que relacione el volumen, *y*, del recipiente (m^3) con la presión, *x*, en la que se encuentra contenido el helio (kPa). $P = \frac{800}{V}$

   b) Con los datos obtenidos realiza la gráfica correspondiente a esta situación.

   - Si se desea guardar 280 m^3 de helio, ¿cuál debe ser la capacidad del recipiente? 280 m^3
   - Si se tuviera un recipiente de 7 m^3, ¿qué presión ejercería el helio? 114.2 Pa
   - Explica la manera en que encontraste estos dos resultados. De la fórmula $P_1 V_1 = P_2 V_2$. Se despeja P_1 y nos queda $P_1 = \frac{P_2 V_2}{V_1}$
   - ¿Qué tipo de gráfica se obtuvo? Una curva

     ¿Por qué? La variable está en el denominador y el numerador es una constante.



2. Compara tus respuestas y la gráfica con las de tus compañeros. Comenten en grupo los tipos de gráficas que obtuvieron en este contenido, y con la ayuda del profesor determinen cuáles son las características principales que caracterizan a este tipo de gráficas.

Cómo enriquecer la actividad

En esta sección, la gráfica es hiperbólica, es posible que al alumno se le dificulte comprenderla, oriéntelos en este sentido y analice con ellos algunas gráficas similares en el pizarrón. Recuerde que algún alumno puede llegar a sustituir el cero en la expresión algebraica y esto es una indeterminación, explique.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Verifique que el alumno comprende el significado de las flechas y lo que representa "el sentido" de cada una. Es conveniente que los cuestione para determinar de qué manera justifican sus respuestas y lo concreto de sus argumentos.

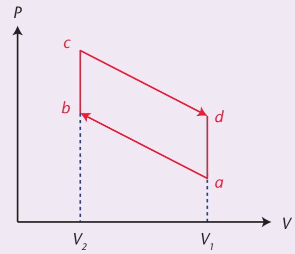
Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que investiguen la gráfica de un motor de 4 tiempos, establecida por Diesel, y que observen las diferencias que hay con respecto al motor de 4 tiempos establecido por Otto.

Matemáticas 3. Por competencias

Desarrolla tus habilidades

En tus clases de Ciencias 2 revisaste las máquinas térmicas, entre ellas están los motores de cuatro tiempos: admisión, compresión, explosión y expulsión. En 1891, el ingeniero alemán Nikolaus August Otto, perfeccionó el motor de gasolina de cuatro tiempos en un sistema muy sencillo, el cual se representa en la siguiente gráfica.



a = Admisión *b* = Compresión
c = Explosión *d* = Expulsión

1. Analízala con detenimiento y contesta lo que se te pide.
   a) ¿Qué tipo de gráfica corresponde cuando se pasa de la admisión a la compresión? Lineal ascendente
   - ¿Qué ocurre con la presión en el sistema? Aumenta
   - ¿Qué ocurre con el volumen? Disminuye
     ¿Por qué? Porque en un sistema cerrado a medida que aumenta la presión, el volumen disminuye.

   b) ¿Qué tipo de gráfica corresponde cuando se pasa de la explosión a la expulsión? Lineal descendente
   - En este caso, ¿qué ocurre con la presión en el sistema? Disminuye
   - ¿Qué ocurre con el volumen? Aumenta

   c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa a los puntos *a*-*b* y *c*-*d*?
   De la fórmula $P_1 V_1 = P_2 V_2$ se despeja P_1 y V_2 $P_1 = \frac{P_2 V_2}{V_1}$ $V_1 = \frac{P_1 V_1}{P_2}$
2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros e investiga la gráfica correspondiente al sistema diésel para un motor de cuatro tiempos y compárenla con el ciclo de Otto.

USA LAS TIC

Para que continúes aprendiendo más acerca del análisis de gráficas, visita las siguientes páginas http://www.educaplus.org/play-138-Transformaciones-termodinámicas.html y http://www.educaplus.org/play-305-Alcance-y-altura-máxima.html (Consultadas el día 16 de octubre de 2012, a las 12:52 horas), ahí encontraras programas interactivos, analízalos y con la asesoría de tu profesor exponlos ante el grupo.

Recursos y materiales

En la página *ThatQuiz* encontrará un simulador que le permitirá trabajar el tema de manera interactiva.

http://www.thatquiz.org/es-7/

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 5	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

ACUÉRDATE DE...

En el contenido anterior trabajaste con ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$, las tabulaste e hiciste su gráfica correspondiente.

1. Se tiene la siguiente expresión algebraica: $x^2 + 4x + 3$, con los siguientes valores de x encuentra el valor de y, realiza la gráfica correspondiente y contesta lo que se te pide.

   a) ¿Qué nombre recibe la gráfica, dada la ecuación?
   Parábola

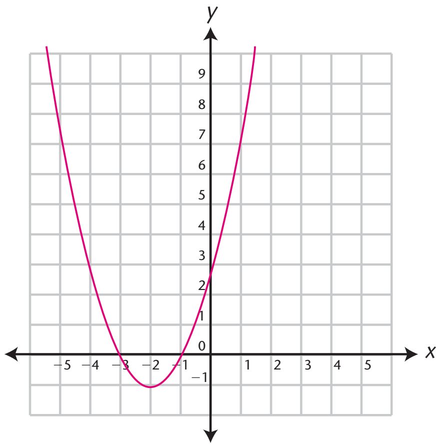
   b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto mínimo de la gráfica?
   $(-2, -1)$

   • ¿Qué nombre recibe este punto?
   Punto de inflexión

   c) ¿La gráfica es **cóncava** hacia arriba o cóncava hacia abajo? Arriba
   ¿Por qué? Los brazos de la parábola abren hacia arriba.

   d) Escribe dos coordenadas en las que se presente la simetría de la curva.
   $(-4,3)$ y $(0,3)$

   e) Escribe las coordenadas en las que se encuentra el eje simétrico de la curva. El eje simétrico corta al eje x en la coordenada $(-2,0)$.



2. Compara tus resultados con los de tus compañeros y, con la asesoría de su profesor, comenten si $y = x^2 + 4x + 3$ es igual a $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

Glosario

Cóncava. Se refiere a la curvatura formada por la línea plana y abierta comprendida entre ambas ramas, en este sentido puede ser cóncava hacia arriba o hacia abajo, es decir, cuando se ve "por dentro". Al verla por fuera de la curva, se le considera una parábola convexa.

Para leer más

Al realizar una gráfica es importante saber determinar el intervalo de los ejes y la graduación necesaria, para ello basta con analizar los valores mayores y menores requeridos para ambos ejes, y esto se logra analizando e interpretando la tabulación.

Qué observar

Esta actividad propone una situación de análisis, con la intención de que el alumno logre determinar que una ecuación de segundo grado es una función no lineal, y que se puede resolver gráficamente a partir de los conocimientos previamente adquiridos.

Cómo enriquecer la actividad

Actualmente los medios electrónicos proporcionan una gran variedad de herramientas útiles para la educación matemática. Es posible utilizar calculadoras, graficadoras virtuales o programas, como Geogebra, que se pueden usar en una computadora. Utilice estos recursos para analizar gráficas y tablas de parábolas en distintas situaciones.

Bitácora pedagógica

Recursos y materiales

Diseñe una actividad y pida a los alumnos que la realicen en el patio de la escuela, donde puedan aplicar las ecuaciones cuadráticas y su respectiva gráfica.

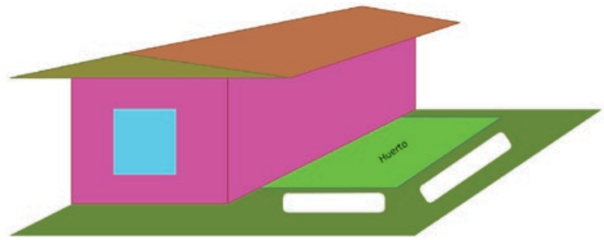
Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 5.1

1. Las ecuaciones cuadráticas tienen diferentes aplicaciones, por ejemplo, don Javier tiene 40 m de tela de alambre que quiere ocupar para construir en la parte trasera de su casa, pegado a la pared, un huerto de forma rectangular, como se muestra en el esquema.

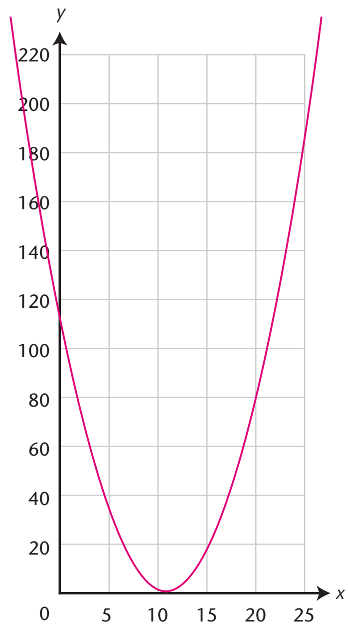
a) ¿Cuáles serían las dimensiones del huerto si desea tener un área máxima?.



- Si x representa un lado del huerto, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el largo del huerto? $20 - x$
- ¿Qué expresión algebraica representa el área del huerto? $A = x(20 - x)$
- ¿Qué estrategia emplearían para encontrar el valor de la literal? Por tanteo, por factorización o por fórmula general.

a) Tabulen para encontrar los valores de la literal y grafiquen los puntos.

x	$y = x^2 - 20x + 99$	y
0	$(0)^2 - 20(0) + 99$	99
5	$(5)^2 - 20(5) + 99$	24
10	$(10)^2 - 20(10) + 99$	-1
15	$(15)^2 - 20(15) + 99$	24
20	$(20)^2 - 20(20) + 99$	99



- ¿Cómo es la parábola, cóncava hacia arriba o hacia abajo? Cóncava hacia arriba

  ¿Por qué? Porque el signo del término de segundo grado es positivo.
- ¿Cuál es el punto máximo de la parábola? 99 en el eje y
- ¿En qué punto de x, pasa el eje simétrico? Pasa por el punto (10,0) y
- ¿Qué significa esto? Que la parábola corta al eje en los puntos 11 y 9.
- ¿Cuánto mide el ancho del huerto? 11 metros
- Anótalo en el esquema.
- ¿Y el largo? 9 metros
- Anótalo en el esquema.

52

Qué observar

Tenga en cuenta que la actividad considera que la pared tiene tela de alambre para completar el perímetro del rectángulo. Verifique que los alumnos comprenden esta situación y que los cálculos que realizan están basados en todo el perímetro.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que cuestione a los alumnos qué pasaría si no hubiera puesto tela de alambre en la pared. Este planteamiento es interesante, porque arroja nuevamente una ecuación cuadrática; sin embargo, el área máxima obtenida es mucho mayor.

Curiosidades, acertijos y más

En la escuela se realizó un partido de basquetbol. Si antes de iniciar el partido ambos equipos de forma deportiva se saludaron, ¿cuál es la cantidad de saludos que efectuó cada integrante si cada equipo tiene 12 jugadores? ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación?

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

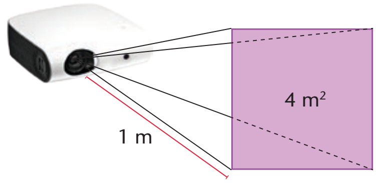
- ¿Cuál es el área máxima del gallinero? 99 m^2
- Si don Javier quisiera un área de 300 m^2, ¿lo podría construir con esta cantidad de tela de alambre?
  No
  ¿Por qué? Porque el área máxima que puede cercar es un cuadrado de 10 x 10, es decir, 100 metros cuadrados, pero como quiere una construcción "rectangular" su área máxima es de 99 m^2 para un "rectángulo de" 11 x 9 metros.
- Y si quisiera que el huerto tuviera un área de 150 m^2, ¿lo podría construir? No
  ¿Por qué? Porque sigue siendo un área mayor a 100 m^2 que es lo máximo que puede cubrir con 40 metros de tela de alambre.

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten si la ecuación cuadrática corresponde a la forma $ax^2 + bx + c$, en caso contrario, ¿qué tipo de ecuación es? Cuadrática o de segundo grado

PRACTÍCALO

Actividad 5.2

1. Diego y sus compañeros de equipo quieren proyectar en el auditorio de su comunidad un documental que realizaron sobre la Revolución Mexicana. El área de la imagen depende de la distancia entre el proyector y la pantalla, como se ilustra a continuación. Cuando el proyector se encuentra a un metro de distancia de la pantalla, se proyecta una imagen de 4 m^2. Con estos datos contesten las preguntas y completen la tabla.



a) ¿Cuál será el área de la imagen cuando el proyector se retira a 1.5, 2, y 2.5 m? Completen la tabla y contesten lo que se les indica.

Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1	1.5	2	2.5
Área de la imagen proyectada (m^2)	4	9	16	25

- Escriban una expresión algebraica que representa el incremento de la imagen proyectada.
  $y = 4x^2$
- Justifiquen su respuesta. Para obtener los valores faltantes es necesario tomar la distancia a la pantalla, elevarla al cuadrado y multiplicarla por cuatro para encontrar la nueva superficie proyectada.
- ¿A qué distancia debe estar el proyector si el equipo de Diego quiere que el documental que se proyecta tenga un área de 64 m^2? 4 m
- Expliquen cómo obtuvieron su resultado. Dando a y el valor 64 y despejando x.

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten si la ecuación que obtuvieron es completa.

Qué observar

Esta actividad puede motivar el desarrollo de la imaginación espacial. Observe que los alumnos comprenden la idea de la situación y son capaces de comprender de qué manera cambia la imagen proyectada mientras el proyector se aleja.

Cómo enriquecer la actividad

Con la ayuda de un proyector, pida a los alumnos que obtengan el área que se refleja a una distancia determinada, y alejando el proyector observen cómo se comporta el área de la imagen. Pida a los alumnos que obtengan la expresión algebraica, tabulen y grafiquen.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Los conocimientos de otras asignaturas deben ser bien aplicados a los problemas matemáticos. Verifique que el alumno comprende el concepto de gravedad, su equivalencia y la relación que se genera entre la distancia y el tiempo, así como la jerarquía de operaciones que se deben realizar.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que retomen la fórmula para calcular la distancia recorrida por un cuerpo en caída libre, y verifique que su respuesta es acorde con dicha fórmula.

Transversalidad

Ciencias 2, Física

Observe que los alumnos pueden representar y analizar el comportamiento de un móvil que se está acelerando constantemente, así como las aplicaciones de este tipo de expresiones a temas relacionados con la presión, fluidos (gasto) y temperatura.

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 5.3

1. Un helicóptero arroja suministros, desde una altura de 176.85 m, a unos investigadores que se encuentran trabajando en cuevas ubicadas en el interior de un cañón. Uno de los investigadores determinó que tardaron 6 segundos en caer los suministros. ¿Qué distancia habrán recorrido los suministros en 1, 2, 3, 4 y 5 segundos?

   a) Completen la tabla.

Tiempo (s)	1	2	3	4	5	6
Distancia recorrida (m)	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5	176.85

   b) De las siguientes expresiones, ¿cuál de ellas corresponde a esta situación?

   A. $d = 0.5\ gt$ B. $d = 0.5\ gt^2$ C. $d = 0.5\ g + t^2$ D. $d = 0.5\ g - t^2$

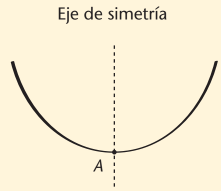
   - Justifiquen su respuesta. Se sustituye el tiempo en la fórmula y se calculan las distancias correspondientes.
   - Elaboren en una hoja de papel milimétrico una gráfica con los datos que obtuvieron, péguenla en su cuaderno.
   - ¿La parábola fue cóncava hacia arriba o hacia abajo? Arriba

     ¿Por qué? Porque el coeficiente del término de segundo grado es positivo.

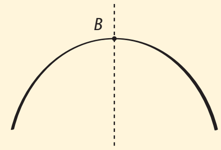
2. Comparen sus respuestas con las de los otros equipos y, con la asesoría de su profesor, expongan ante el grupo la gráfica que obtuvieron.

Para tener en cuenta

Al graficar una expresión cuadrática, se pueden obtener dos tipos de parábola una cóncava hacia arriba, ésta se presenta si y sólo si $a > 0$, la cual también recibe el nombre de concavidad positiva; en caso contrario, es cóncava hacia abajo cuando $a < 0$, también llamada concavidad negativa.



a) Cóncava hacia arriba $a >$ que =



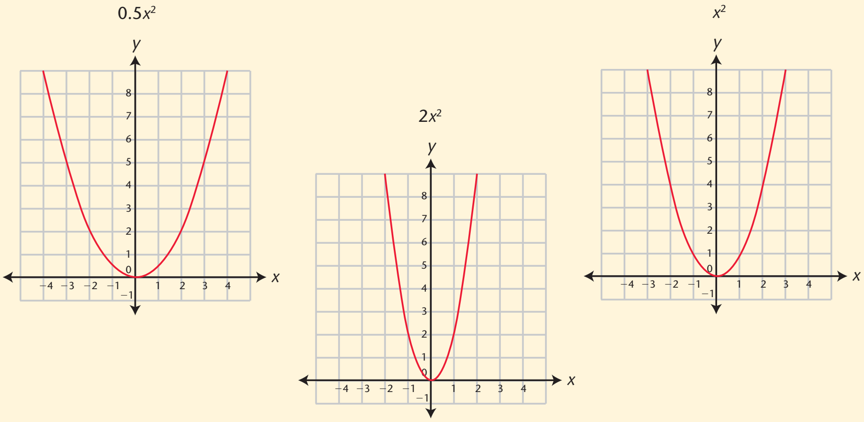
b) Cóncava hacia abajo $a <$ que =

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

Para leer más

El coeficiente que acompaña al término de segundo grado determina qué tan abierta o cerrada es una parábola, entre más grande sea el número más cerrada es la curva, entre menor sea es más abierta. Por ejemplo, al graficar $0.5x^2$, x^2 y $2x^2$ se puede observar claramente cómo influye este número en la amplitud de cada parábola

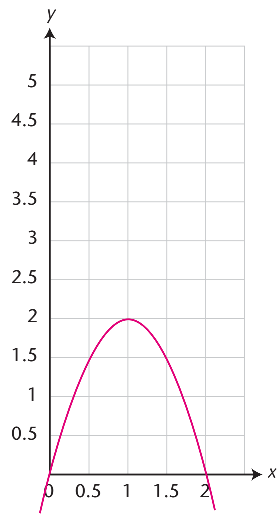


LO QUE APRENDÍ

1. En la clase de Ciencias 2, el equipo de Marina llevó a cabo un experimento de lanzamiento de proyectiles, en el patio de la escuela; en el desarrollo del lanzamiento la altura (metros) alcanzada la denotaron con y; mientras que la distancia que recorrió, como x; ambos están relacionados por la ecuación $y = -2x^2 + 4x$.

a) Haz la tabulación correspondiente y grafícala en el plano.

x	$y =$ ______	y
1	$-2(1)^2 + 4(1)$	2
2	$-2(2)^2 + 4(2)$	0
3	$-2(2)^2 + 4(2)$	-6



- ¿Cuál será la altura máxima que alcanzó su proyectil? 2 m
- Explica qué punto de la parábola te indicó la altura máxima. Está en la coordenada (1,2), este es el punto de inflexión que indica la altura máxima que alcanzó el proyectil.

Qué observar

Recuerde que esta sección pretende lograr que los estudiantes se autoevalúen, es decir, que aprendan a reconocer qué es lo que ya saben hacer, qué más están aprendiendo y en qué parte del contenido deben estar más atentos.

Cómo enriquecer la actividad

Analice en clase distintos tipos de gráficas cuadráticas, donde la intención sea valorar la función del signo del término de segundo grado y cómo afecta a la gráfica resultante. Para ello, los medios electrónicos son la mejor sugerencia, aunque también es posible realizar algunas tablas y gráficas a mano, de ser este el caso pida que utilicen hojas milimétricas.

Transversalidad

Verifique que los alumnos pueden representar mediante una expresión cuadrática la manera de cómo se comporta la economía de una población en el transcurso de un tiempo determinado por ellos.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Conviene que trabajen en parejas, dé el tiempo necesario para analizar el ejercicio. La resolución es importante, pero no resta importancia a la comprobación. Vigile que sigan el procedimiento y que no dejen de comprobar, esto les dará más seguridad al momento de mostrar sus resultados.

Cómo enriquecer la actividad

Elija a un alumno para que pase al pizarrón y resuelva el ejercicio. Explique de manera detallada el procedimiento que empleó, pero sobre todo haga énfasis en la comprobación del resultado al calcular el área del camino de arena, esto es importante por el análisis que deben hacer, sobre todo con la superficie cuadrada de las esquinas del camino.

Reflexión

Sobre el tiempo libre

Pregunte a los estudiantes qué habrá querido decir el filósofo y matemático inglés Bertrand Russell (1872-1970) cuando sentenció: "El sabio uso del ocio es un producto de la civilización y de la educación".

- ¿Qué nombre recibe este punto? Punto de inflexión
- ¿Cómo fue la concavidad de la parábola? Es cóncava hacia abajo.

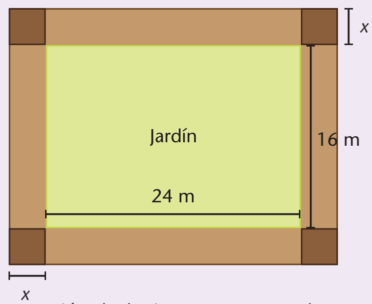
¿Por qué? Porque el signo del término de segundo grado es negativo, esto determina que la parábola abra hacia abajo.

2. Compara tus resultados con los de tus compañeros y discutan cuáles serían los valores que determinan la amplitud entre la separación de la línea que forman la curva de una parábola.

Desarrolla tus habilidades

1. Trabaja con un compañero para que lean y analicen la siguiente situación; luego contesten lo que se les pide.

   a) Un jardín rectangular de 24 m de largo por 16 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Hallen la anchura de dicho camino, si se sabe que su área es de 176 m^2. Analicen la imagen.



   - ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a esta situación? $x^2 + 20x - 44 = 0$
   - Expliquen cómo encontraron el resultado. Se multiplica la base $(2x + 24)$ por la altura $(2x + 16)$, esto da $4x^2 + 80x + 384 = 560$ (la suma de las 2 áreas), al simplificar e igualar a cero queda $x^2 + 20x - 44 = 0$
   - ¿De qué forma demostrarían que su resultado es correcto? Basta con sustituir el valor encontrado $x = 2$ en los datos del esquema y hacer las operaciones necesarias para verificar que se obtiene un área de 176 m^2.

2. Comparen sus respuestas con las de los demás compañeros del grupo y de ser necesario, planteen otras situaciones.

USA LAS TIC

En la siguiente página encontrarás un programa interactivo que te permitirá fortalecer lo aprendido, realiza las diferentes actividades y coméntalas con el profesor y con tu grupo. http://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas2/funcionessegundogrado (Consultada el día 18 de octubre de 2012, a las 14:32 horas)

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido 6	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

ACUÉRDATE DE...

1. En el ciclo anterior calculaste la probabilidad de que ocurra un evento, por ejemplo: si se lanza un dado y una moneda al mismo tiempo, ¿de cuántas formas se puede presentar el resultado?

   a) Regístralas en la siguiente tabla.

Moneda / Dado	1	2	3	4	5	6
S	S1	S2	S3	S4	S5	S6
A	A1	A2	A3	A4	A5	A6

   b) Al lanzar al mismo tiempo el dado y la moneda, tres eventos que se podrían presentar:

   A. La moneda cae Sol   B. En el dado cae 3   C. La moneda cae Sol y en el dado cae 3

   c) Si al hacer el experimento una sola vez en la moneda cae Sol y en el dado cae 4, ¿a cuál de los tres eventos es favorable? El evento A

   ¿Por qué? Porque cumple con la condición "cae sol".

   - Menciona un resultado que sea favorable al evento B. Sol con tres, o bien, águila con tres.
   - ¿Cuántos resultados son favorables al evento C? Uno de doce
   - Explica cómo obtuviste los resultados de los eventos. Comparando la cantidad de eventos favorables con el total de eventos posibles.

   d) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento? 12 posibles resultados

2. Comparen sus resultados con los de algunos compañeros y, con la asesoría de su profesor, comenten si el resultado del dado se ve afectado cuando se lanza la moneda y cae águila.

PRACTÍCALO

Actividad 6.1

1. Óscar y Adriana están jugando a "La oca" con un par de dados. Si se lanzan dos dados al mismo tiempo, ¿cuáles son los posibles resultados que pueden obtener en el juego, al sumar los puntos de los dados?

   a) Completen la tabla.

B / A	1	2	3	4	5	6
1	1 – 1	1 – 2	1 – 3	1 – 4	1 – 5	1 – 6
2	2 – 1	2 – 2	2 – 3	2 – 4	2 – 5	2 – 6
3	3 – 1	3 – 2	3 – 3	3 – 4	3 – 5	3 – 6

Qué observar

Analice los argumentos que dan los alumnos a las respuestas de las preguntas hechas para esta actividad, para que vayan entendiendo el concepto de eventos independientes.

Cómo enriquecer la actividad

Organice al grupo para que algunas parejas den respuesta a cada cuestión con sus propios argumentos. Propicie la participación de todo el grupo.

Recursos y materiales

En la página *ThatQuiz* encontrará un simulador que le permitirá trabajar el tema de manera interactiva con los alumnos.

http://www.thatquiz.org/es-d/matematicas/probabilidad/

Bitácora pedagógica

Qué observar

Verifique que los alumnos sean capaces de comprender la relación que tiene el evento favorable con la totalidad de resultados posibles y cómo se representan numéricamente. No olvide que al igual que en las fracciones, lo ideal es representar las cantidades simplificadas a su mínima expresión. Verifique que el alumno comprende por qué en la columna decimal siempre suma 1 y en la de porcentaje siempre suma 100.

Cómo enriquecer la actividad

Reafirme con ellos los procedimientos aritméticos necesarios para llevar a cabo esta actividad. Puede hacer énfasis en las conversiones y en demostrar que efectivamente se trata de cantidades equivalentes.

Curiosidades, acertijos y más

En cierto edificio se usan dos ascensores, el primero lo usan 45 % de los inquilinos, y el resto usan el segundo. El porcentaje de fallos del primero es 5 %, mientras que el del segundo es de 8 %. Si en cierto día un inquilino queda "atrapado" en un ascensor, hallar la probabilidad de que haya sido en el primero.

Matemáticas 3. Por competencias

A \ B	1	2	3	4	5	6
4	4 – 1	4 – 2	4 – 3	4 – 4	4 – 5	4 – 6
5	5 – 1	5 – 2	5 – 3	5 – 4	5 – 5	5 – 6
6	6 – 1	6 – 2	6 – 3	6 – 4	6 – 5	6 – 6

- ¿Cuántas permutaciones posibles presentan? 36
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga 2? $\frac{1}{36}$ ¿Por qué?
  Porque únicamente cuando cae 1 – 1 es posible sumar 2, es solo una de 36 posibilidades.
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga 7? $\frac{6}{36}$ ¿Por qué?
  Las combinaciones son 6 – 1, 5 – 2, 4 – 3, 3 – 4, 2 – 5 y 1 – 6.
- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga 10? $\frac{3}{36}$ ¿Por qué?
  Las combinaciones son 6 – 4, 5 – 5 y 4 – 6.
- De los tres eventos anteriores, ¿cuál tiene mayor probabilidad? Que caiga 7
  Justifiquen su respuesta. Al reducir estas cantidades queda $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, lo que indica que hay más posibilidades de que caiga un 7 que un 2 o un 10.

b) Anoten en la tabla la probabilidad de cada uno de los eventos, en fracción, decimal y porcentaje.

Evento	Probabilidad en:		
	Fracción	Decimal	Porcentaje
Caiga 2	$\frac{1}{36}$	0.027	2.7 %
Caiga 3	$\frac{2}{36}$	0.055	5.5 %
Caiga 4	$\frac{3}{36}$	0.083	8.3 %
Caiga 5	$\frac{4}{36}$	0.111	11.1 %
Caiga 6	$\frac{5}{36}$	0.138	13.8 %
Caiga 7	$\frac{6}{36}$	0.166	16.6 %
Caiga 8	$\frac{5}{36}$	0.138	13.8 %
Caiga 9	$\frac{4}{36}$	0.111	11.1 %
Caiga 10	$\frac{3}{36}$	0.833	18.3 %
Caiga 11	$\frac{2}{36}$	0.055	15.5 %
Caiga 12	$\frac{1}{36}$	0.027	2.7 %
TOTAL	$\frac{36}{36}$	1	100 %

- ¿Qué se observa en el total de las probabilidades? Que siempre se representa un total.
- ¿Qué significa esto? Que todas las posibilidades se relacionan con un todo y esto a su vez con un 1 en decimal y con un 100 en porcentaje.
- ¿Cuál sería la probabilidad de obtener en el lanzamiento de los dos dados 4 y 1? 2 de 36
  Justifiquen su respuesta. Las combinaciones son solo 4 – 1 y 1 – 4, es decir solo 2 de 36, al reducir queda en 1 – 18.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

c) De los resultados anteriores, seleccionen uno de ellos y represéntenlo sobre la recta numérica que le corresponda.

En fracción

0 — $\frac{1}{2}$ — 1

Imposible — Medio posible — Posible

La intención es que el alumno vea gráficamente la equivalencia en la representación de la probabilidad.

En decimal

0 — 0.5 — 1

Imposible — Medio posible — Posible

En porcentaje

0% — 50% — 100%

Imposible — Medio posible — Posible

- ¿Cuál evento seleccionaron? Justificada por el alumno.
- Analizando las tres escalas, ¿cuál de las tres escalas de medición, fraccionaria, decimal o porcentaje es la que se puede considerar más adecuada? Permita que el alumno justifique su respuesta.
- Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que caiga 5? $\frac{4}{36}$ es decir $\frac{1}{9}$, 0.11 o bien 11 %

  y ¿cuál es la probabilidad de que caiga 1? Es un evento nulo, no hay posibilidades de que caiga 1.

2. Comparen sus resultados con los de algunos compañeros y, con la asesoría del profesor, comenten cuál de las escalas consideran más adecuada para representar que una probabilidad tenga mayor éxito y cuál es la utilidad de que se pueda representar de esta manera?

Para leer más

En un experimento aleatorio se obtiene un resultado del cual no se tiene control y éste prácticamente depende del azar.

El evento que ocurre en un experimento aleatorio recibe el nombre de *espacio evento*, y al conjunto de resultados del experimento se le llama *espacio muestra.*

Para tener en cuenta

Cuando se determina la probabilidad de un evento, se compara el total de posibilidades con las condiciones favorables, por ejemplo, al tirar un dado la condición favorable puede ser que caiga un número menor que 5, es decir que conste de los números 1, 2, 3 y 4, y como el lanzamiento tiene en total 6 posibilidades, la probabilidad de ocurrencia del evento es $\frac{4}{6}$, esta expresión se puede reducir a $\frac{2}{3}$ y al realizar la división se obtiene 0.6 periódico, es por ello que siempre la probabilidad en decimal se expresa entre los números 0 y 1, donde 0 equivale a una probabilidad nula y 1 a un evento seguro.

Qué observar

Esta actividad tiene como propósito analizar gráficamente la equivalencia entre las distintas representaciones de la probabilidad. Verifique que los alumnos son capaces de identificarla, pero sobre todo que comprenden con claridad su significado y utilidad.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que elaboren un listado pequeño, con algunas de las situaciones que ellos conozcan, donde se utilicen estas cantidades y que discutan por qué en unas es más conveniente usar una forma que cualquiera de las otras.

Transversalidad

Geografía de México y del mundo

Observe que los alumnos son capaces de representar este tipo de conocimientos al campo de la Geografía, en relación con el cambio climático en una estación del año, es decir, las probabilidades de lluvia, día soleado, día nublado, etcétera.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Estos retos son importantes, porque el alumno debe determinar cuáles son las condiciones que provoca el hecho de que se tengan que devolver las tarjetas a la caja. Ponga especial atención a la manera en cómo comprenden este hecho y verifique que lo consideren durante el desarrollo de la actividad.

Cómo enriquecer la actividad

Puede cuestionarlos durante la clase acerca de qué pasaría si se cambiara la condición de tener que regresar cada tarjeta y qué consecuencia tendría en las próximas extracciones en cuanto a su probabilidad. Puede analizar también con ellos casos similares, con la intención de que deduzcan que este fenómeno se repite igual para todos los experimentos.

Reflexión

No solamente haga preguntas y espere las respuestas, conviene escuchar los comentarios de los alumnos; es posible que sus aportaciones permitan diseñar ejercicios más interesantes.

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO **Actividad 6.2**

1. Analicen y discutan la siguiente situación.

En el salón de Matemáticas de Israel, el profesor pidió a los equipos con los que estaba trabajando que con dos cajas de cartón y una hoja de cartulina de 28 cm por 22 cm llevaran a cabo la siguiente instrucción:

Corten la hoja en 16 partes iguales para obtener 16 tarjetas, numérenlas del 1 al 8, de tal manera que haya dos tarjetas con el mismo número. Coloquen en cada caja 8 tarjetas. Marquen una de las cajas con la letra A y la otra con la letra B.

Una vez hecho lo anterior, el profesor les pidió que en cada caja realizaran una extracción con reemplazo, es decir, que extraigan la tarjeta y la regresen a la caja correspondiente.

a) Hagan el mismo experimento del equipo de Israel, y completen la tabla.

Número de extracción	Caja 1	Caja 2	Número de extracción	Caja 1	Caja 2
1	3	8	7	3	3
2	5	3	8	7	1
3	8	6	9	4	2
4	6	4	10	8	3
5	8	2	11	8	8
6	4	5	12	7	5

- ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento? 64 eventos posibles.
- Expliquen cómo encontraron el resultado. 8 tarjetas por 2 cajas dan un total de 64 combinaciones posibles.

b) Consideren los siguientes eventos que se pueden presentar durante un experimento. Andrea, Juan y Valeria decidieron jugar con el experimento de la clase de Israel.

- Andrea gana si la suma de las dos tarjetas es 14.
- Juan gana si dos tarjetas muestran diferentes números.
- Valeria gana si dos tarjetas muestran números iguales.
  - En la primera extracción, salió 6 y 8, ¿quién de los tres gana con este resultado? Andrea y Juan
  - En la segunda extracción se obtuvo 7 y 7, ¿quién de los tres gana con este resultado? Andrea y Valeria
  - En la tercera extracción se obtienen 7 y 5, ¿quién de los tres gana con este resultado? Juan
  - De los tres eventos mostrados, ¿alguno afecta a los otros dos? Si

    ¿Por qué ocurre esto? Si gana Valeria, no puede ganar Juan y viceversa.
  - Al analizar cada uno de los eventos, consideras que los casos que lo hacen favorable se pueden presentar en alguno de los otros dos? Sí

    Justifica tu respuesta. Andrea puede ganar junto con Juan o con Valeria.
  - ¿Es posible que dos eventos en lugar de afectarse, se complementen? Sí

    ¿Por qué ocurre esto? Es posible que sumen 14 y además sean iguales o diferentes.

c) Diseñen una estrategia que les permita hacer 64 extracciones de tarjetas de las cajas al azar, completen la tabla y contesten lo que se les indica.

Evento		
A. La suma de las dos tarjetas es 14.	B. Dos tarjetas muestran diferentes números.	C. Dos tarjetas muestran números iguales.

Bitácora pedagógica

- Escriban tres resultados que sean favorables al evento A. 8 – 6, 7 + 7 y 6 + 8
- ¿Cuáles son los resultados que favorecen al evento B? Todos menos 8 de números iguales que van desde 1 + 1 hasta 8 + 8.
- Escriban tres resultados que sean favorables al evento C. 1 + 1, 2 + 2, 3 + 3…8 + 8

2. Comparen sus resultados con el resto de sus compañeros. Y entre todos comenten si la suma de las probabilidades de cada resultado de este experimento es igual a 1.

Para tener en cuenta

Para que dos eventos sean independientes el uno del otro es necesario que ninguno de ellos altere la probabilidad de ocurrencia del otro. Esto quiere decir que cada uno puede ocurrir de forma independiente y al mismo tiempo.

Cuando se analiza la probabilidad de ocurrencia de un evento es común que ésta se mida entre los números 0 y 1, donde cero indica la imposibilidad de que ocurra y el 1 representa un evento seguro.

Cuando dos eventos se excluyen uno al otro (mutuamente excluyentes) es porque la ocurrencia de uno depende de la ocurrencia del otro, es decir que al ocurrir el evento, imposibilita totalmente que el otro ocurra.

PRACTÍCALO

Actividad 6.3

1. Analicen y discutan los experimentos que se les indican e identifiquen las características de cada uno.

a) Lanzar dos monedas al mismo tiempo.
Primer evento: caen las dos monedas por su anverso.
Segundo evento: cae una cara por su anverso y la otra por el reverso.

b) Lanzar un dado.
Primer evento: Cae un número menor que 3.
Segundo evento: Cae un número mayor que 3.

c) Lanzar una moneda y un dado.
Primer evento: cae la cara por su anverso y el dado en un número par.
Segundo evento: cae la cara por su reverso y el dado cae en un número mayor que 4.

d) Lanzar dos dados.
Primer evento: los dos números de las caras que quedan hacia arriba son pares.
Segundo evento: los números obtenidos en sus caras superiores al sumarse dan un número mayor que 7.

De estos eventos:

- ¿Cuáles son totalmente independientes de los otros? Los eventos del inciso b.
- ¿Existirá alguna condición que impida que si se lleva a cabo un evento, otro sea imposible realizarlo? No
- Explica tu respuesta. Al analizar los 4 eventos, ninguno impide que al realizar el primero se realice el segundo.
- ¿Qué características debe tener un evento para que no dependa de otro? Que el primer evento no imposibilite la ocurrencia del segundo.

Qué observar

El razonamiento deductivo es muy importante para esta actividad. Verifique que los alumnos comprenden las diferencias entre cada concepto y son capaces de identificar cada una por sus propios medios, si es necesario, aclare sus dudas y justifique el porqué de sus errores.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que elaboren una pequeña lista con algunos eventos que sean similares a los ejemplos, analice algunos frente al grupo y haga mucho énfasis en la apreciación y el razonamiento que se necesita para poder diferenciarlos correctamente.

Transversalidad

Historia 1 y 2

Verifique que los alumnos apliquen estas nociones de probabilidad con respecto a eventos relacionados con la historia de un país; por ejemplo, en una revolución las variables son de tipo socioeconómico, sociocultural, sociopolítico y éstas mismas variables tienen la probabilidad de generar nuevamente una revolución.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Dé a los alumnos el tiempo necesario para analizar y resolver cada situación. Vigile claramente las respuestas y justificaciones, y que vayan encaminadas dada una de las situaciones.

Cómo enriquecer la actividad

Seleccione a uno de los alumnos para que exponga sus procedimientos y resultados de cada situación. Dé apertura al diálogo y a la intervención de los demás integrantes del grupo.

Matemáticas 3. Por competencias

- Para alguno de los experimentos, ¿será posible que dos eventos ocurran de manera simultánea? Justifiquen su respuesta. Los eventos del inciso d.
- ¿En alguno de los eventos dados, ¿es posible que se complementen entre sí, es decir, que al sumar sus probabilidades se obtenga el 100%? Sí en el b Expliquen su respuesta. Al ser eventos independientes, la suma de sus probabilidades da 100 %.

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen, ¿cómo se puede saber cuando dos eventos no pueden ocurrir simultáneamente y en qué casos se complementan uno al otro?

Glosario

Escala. Es el conjunto de valores que puede tomar una determinada medida.

Para leer más

La probabilidad de un evento se encuentra en la **escala** de 0 a 1, ésta se puede representar de diferentes maneras: como fracción, por ejemplo $P(A) = \frac{1}{3}$; en forma de decimal, $P(A) = 0.333$; o en su caso en porcentaje, por ejemplo: $P(A) = 33.3\%$.

PRACTÍCALO **Actividad 6.4**

Analiza los dos experimentos planteados y contesta las preguntas.

1. En una bolsa de plástico opaca están 4 pañuelos de diferentes colores: azul, verde, blanco y negro, suponiendo que se harán varias extracciones de pañuelos, éstos se devolverán a la bolsa.
   a) ¿Cuál sería la probabilidad de que en la cuarta extracción se obtenga el pañuelo blanco, si en las tres anteriores salieron el azul, el verde y el negro? 1 de 4 Explica tu respuesta. Al regresar todos los pañuelos en cada extracción, se logra que la probabilidad de la siguiente sea la misma que la primera que se realizó.
   b) Si se repiten las extracciones con las mismas condiciones, la probabilidad de obtener el pañuelo blanco en la próxima extracción cambió? No Explica tu respuesta. Mientras se mantenga la condición de devolver cada pañuelo a la bolsa la probabilidad no va a cambiar.
2. Lanzar un dado cinco veces de manera consecutiva.
   a) Tres de esos resultados fueron números pares y dos de ellos impares, ¿cuál será la probabilidad de que en el sexto tiro caiga otro número impar? 3 de 6, o bien 1de 2
   b) ¿Cuál será la probabilidad de que en el sexto tiro salga un número 4 o mayor? 2 de 6, o bien 1 de 3
   ¿Cómo determinaste este resultado? Los resultados de los tiros anteriores no afectan la probabilidad de ocurrencia del siguiente lanzamiento, por lo tanto, todos los números tienen la misma posibilidad de salir.
3. ¿Es posible que estos eventos ocurran simultáneamente o son independientes entre sí? Si
   ¿Por qué ocurre esto? Tendría que caer únicamente el número 5, para que fuera “impar” y mayor que 4 al mismo tiempo.
4. Contrasta tus respuestas con las de tus compañeros y, con la asesoría de su profesor, determina de qué manera influye el número de veces que se repite un experimento y las condiciones en que se realiza al momento de calcular la probabilidad.

Bitácora pedagógica

LO QUE APRENDÍ

1. En la siguiente tabla se muestran los talleres que eligieron los alumnos de tres grupos de primer grado de una escuela secundaria técnica al iniciar el ciclo escolar.

Taller	Construcción	Electricidad	Industria del vestido	Artes plásticas	Informática
Alumnos	20	25	18	30	28

a) Determina las siguientes probabilidades.

- Alumnos de construcción o informática. $\frac{48}{121}$
- Alumnos que no estén en electricidad. $\frac{96}{121}$
- Alumnos de artes plásticas o industria del vestido. $\frac{48}{121}$
- Alumnos que no estén en informática. $\frac{93}{121}$
- Explica cómo encontraste las probabilidades. Sumando la probabilidad de cada evento.

b) En términos de porcentaje, cómo quedarían representados.

Taller	Fracción	Decimal	Porcentaje
Construcción	$\frac{20}{121}$	0.165	16.5 %
Electricidad	$\frac{25}{212}$	0.206	20.6 %
Ind. del vestido	$\frac{18}{121}$	0.148	14.8 %
Artes plásticas	$\frac{30}{121}$	0.247	24.7 %
Informática	$\frac{28}{121}$	0.231	23.1 %
TOTAL	$\frac{121}{121}$	1.0	100 %

- ¿Estos eventos son independientes entre sí o hay algunos que se complementen? Algunos se complementan
  Explica tu respuesta. También hay eventos que son independientes entre sí.
- Si ocurre alguno de los eventos, ¿este hecho hace que se altere la probabilidad de ocurrencia de los otros? Sí Explica tu respuesta. Algunos eventos son mutuamente excluyentes.
- ¿Si quitamos dos de los talleres, esto modifica que los eventos sean independientes o complementarios entre sí? ______ Explica tu respuesta. Depende de los talleres que se quiten.
  Cada evento tiene sus propias características, por lo que afecta de manera diferente la ocurrencia de los demás si se omiten.

2. Compara tus resultados con los de algunos compañeros y, con la asesoría del profesor, comenten cómo es un evento independiente y elaboren una conclusión.

Desarrolla tus habilidades

1. Juan realizó tres volados de cuatro de manera consecutiva y en todos ellos ha caído sol, ¿cuál es la probabilidad de que en un cuarto volado también caiga sol? $\frac{1}{2}$
   a) ¿Influye de alguna manera el antecedente de los 3 volados lanzados anteriormente? Explica tu respuesta. No, eso es independiente.
   b) Si en el cuarto volado se lanzan dos monedas, ¿cuál sería la probabilidad de que caigan dos águilas y dos soles? $\frac{2}{4}$ o bien $\frac{1}{2}$
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que al realizar nuevamente 4 lanzamientos con una sola moneda se obtengan primero 3 caras iguales y una distinta? $\frac{1}{16}$ o bien $\frac{1}{8}$
2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y, con la asesoría del profesor, concluyan por qué es importante que en una probabilidad la escala esté dada entre 0 y 1.

USA LAS TIC

Para que ejercites más acerca del uso de las la escala de la probabilidad en un evento vistita la siguiente página electrónica http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Prob/Index.html (Consultada el día 22 de octurbre de 2012, a las 11:58 horas), ahí encontrarás un interactivo en el que podrás calcular la probabilidad con una ruleta y jugar haciendo cambios; experimenta con esta ruleta de colores, comenta tu visita con algunos de tus compañeros y, con la ayuda de su profesor, determina ¿cuál es la ventaja de haber utilizado este recurso interactivo para tu comprensión de este tema?

Qué observar

Las fracciones utilizadas en esta actividad son irreducibles, esto puede complicar un poco el trabajo de clase. Verifique que los alumnos saben hacer correctamente el registro y son capaces de identificar cada resultado. Haga nuevamente énfasis en la suma de decimales y porcentajes.

Curiosidades, acertijos y más

En una partida de dados en que jugaban dos personas, las reglas eran las siguientes: uno tiraba dos dados y multiplicaba la puntuación, es decir, si sacaba un 4 y uno, 6 el resultado era 24. El otro igualmente tiraba y hacía lo mismo, imaginemos un 3 y un 5, por lo tanto, el resultado es 15. Entonces el perdedor, que era el de la cifra más pequeña, pagaba la diferencia en $, en este caso 24 – 15 = $ 9 de pérdida para el segundo jugador. Aquel día, Antonio, que era el primero en tirar, sacó un 3 y un 4, que en puntuación era 12. Y dijo: “Amigo Bernardo, mi tirada es buena, tengo 19/36 posibilidades de ganar contra 13/36 de perder (el resto son empates), dame 1 y no tires los dados, pues seguramente perderás más. ¿Qué debe hacer Bernardo? ¿Por qué?

Bitácora pedagógica

Qué observar

Permita que el alumno analice la situación dada y responda las preguntas utilizando los conocimientos y experiencias previas, ponga especial atención a las justificaciones y conclusiones a las que llega y valore la capacidad de análisis, deducción y conclusión con las que resuelve esta actividad.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que elaboren un listado de distintas situaciones sociales y cercanas a su vida cotidiana, donde sea de utilidad el realizar una encuesta, que determinen el problema principal y cuál sería el beneficio obtenido, de esta manera aprenderán a determinar el propósito de una encuesta.

Recursos y materiales

En la página de Educar, en su artículo Análisis de la información, encontrará algunas sugerencias de actividades con que trabajar el tema. Utilice el buscador de la página para encontrar el artículo.

http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=70503&referente=docentes

Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Análisis y representación de datos
Contenido 7	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

ACUÉRDATE DE...

En estudios estadísticos anteriores ya has realizado **encuestas** y analizado e intepretado los resultados obtenidos, éstos permiten conocer información acerca del comportamiento sobre diversas situaciones o fenómenos de cualquier índole (social, natural, etcétera) para poder tomar decisiones con base en los resultados.

Glosario

Encuesta. Es una técnica de investigación que puede ser de forma verbal (por medio de la entrevista) o escrita (mediante la aplicación de un cuestionario previamente diseñado).

Para recordar dichos estudios realiza la siguiente actividad y considera que el propósito es obtener un resultado adecuado, es decir, de utilidad, y tiene el propósito de mejorar alguna situación, por ejemplo, el cambio climático en el transcurso del tiempo, el incremento de los precios de la canasta básica, entre otros, con el fin de obtener un beneficio para una población.

La fase inicial es de gran importancia, porque es donde se necesita seleccionar la pregunta o preguntas pertinentes para llevar a cabo el estudio, así como la manera en cómo se van a adquirir los datos.

1. Lee con atención las siguientes preguntas que se utilizan comúnmente para la elaboración de una encuesta en la escuela. Contéstalas en tu cuaderno.

ENCUESTA A
- ¿Qué te gusta más de la escuela? ¿Por qué?
- ¿Qué es lo que no te gusta de la escuela? ¿Por qué?

ENCUESTA B
- ¿Cuál es tu materia favorita? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la materia o asignatura que se te hace más difícil? ¿Por qué?

a) De acuerdo con las preguntas de las encuestas A y B, ¿consideras que con esto sería suficiente para conocer las inquietudes de los alumnos? No ¿Por qué?
Se debe realizar un cuestionario que permita investigar una situación lo necesario.

b) ¿Qué tipo de respuestas esperarías obtener en las dos encuestas?
Diversas respuestas, de acuerdo con la edad y contexto de los entrevisatados.

c) Si eligieras cualquiera de las dos encuestas, ¿qué otras preguntas podrías anexar?
Se espera que el alumno sugiera las preguntas que considere más adecuadas.

d) Una vez que has aplicado la encuesta, ¿de qué manera podrías conocer de mejor manera las inquietudes de los estudiantes? Analizando los resultados para poder tomar decisiones en cuanto al tema de la encuesta.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten por qué es necesario representar los resultados de una encuesta por medio de una gráfica.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

PRACTÍCALO

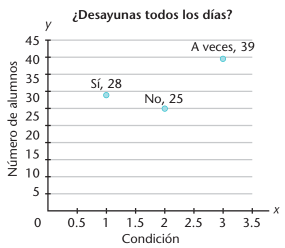
Actividad 7.1

La alimentación en los jóvenes es de suma importancia debido a la cantidad de actividades que desarrollan durante el día, sobre todo si están estudiando.

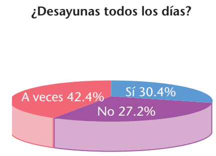
1. Junto con un compañero, analiza la información que se obtuvo mediante la aplicación de una entrevista. Asimismo analicen las gráficas correspondientes y contesten lo que se les indica.

¿Desayunas todos los días?					
Sí		No		A veces	
Conteo	Frecuencia	Conteo	Frecuencia	Conteo	Frecuencia
IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII III	28	IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII	25	IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIII	39

Gráfica 1

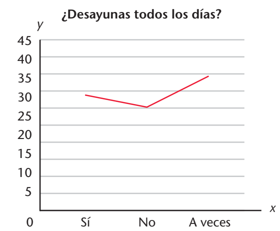


Gráfica 2



Gráfica 3

Gráfica 4



a) ¿Qué gráfica te permite comprender mejor el comportamiento de esta encuesta? El alumno decidirá la que considere mejor.

¿Por qué? El alumno debe sustentar los motivos por los cuales seleccionó cierto tipo de gráfica como “más adecuada” para comprender esta encuesta.

b) ¿Qué gráfica piensas que es más difícil de comprender? RM: Depende del alumno

¿Por qué? El alumno debe sustentar los motivos por los cuales opina que esta gráfica es la más difícil.

2. De las encuestas que se propusieron en la sección “Acuérdate de…”, elijan una de las dos y, con la supervisión de su profesor, aplíquenla en su escuela, procuren tomar un tamaño de muestra fácil de manejar. Determina el número más conveniente de alumnos que se van a entrevistar.

a) Registren sus resultados en una tabla, deben acordar cuáles y cuántas columnas y renglones, de la misma manera para los encabezados y títulos adecuados. Elaboren la tabla de datos en su cuaderno.

- Examinen los datos que se obtuvieron y, de acuerdo a las diferentes gráficas que conocen, determinen, ¿cuál de ellas nos permite comunicar de manera fácil la información obtenida?
- Elaboren en su cuaderno la gráfica que seleccionaron.
- Redacten una justificación que explique por qué seleccionaron esa gráfica. Se espera que el alumno justifique la razón por la que considera que es más adecuado usar cierto tipo de gráfica.

Qué observar

Deje que los alumnos trabajen desde el principio hasta el final. Sea un observador pasivo y espere a ver los resultados. Interrúmpalos un momento para seleccionar a una pareja e indicarles que tienen el compromiso de exponer sus resultados para que vayan preparando los espacios necesarios.

Cómo enriquecer la actividad

Permita que expongan todo el ejercicio, invite al grupo a no interrumpir. Al finalizar la exposición, si hay dudas o preguntas, que las hagan a la pareja expositora.

Transversalidad

Geografía de México y del mundo

Observe que los alumnos son capaces de interpretar estudios de encuestas representados por los censos de población de un estado de la República mexicana, o en su caso, verifique que son capaces de analizar el tipo de preguntas que lleva a cabo el INEGI, para realizar sus censos, así como la forma de cómo las representan.

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

3. Escriban una conclusión acerca de los resultados que obtuvieron al aplicar la encuesta. Se espera que el alumno tome sus propias conclusiones y tome las decisiones que habría que realizar para solucionar la situación planteada en la encuesta.

4. Comparen sus respuestas con las de los otros equipos y bajo la supervisión de su profesor hagan una presentación ante el grupo.

Qué observar

Verifique que los alumnos comprenden la secuencia lógica de la realización de este estudio, y que son capaces de valorar la importancia de cada parte del proceso. Cerciórese de que tienen el conocimiento necesario y la habilidad para poder utilizarlo.

Para tener en cuenta

La realización de un estudio debe considerar diferentes etapas, por ejemplo:

1. Definición del experimento o estudio sobre lo que se quiere investigar y lo que se pretende obtener.
2. La obtención de datos. Definir a quién se aplicará el estudio, cómo van a obtener los datos, cómo elegir el tipo de pregunta que se hará.
3. Organización y análisis de datos. Ordenar y clasificar los datos que se van a obtener; elegir la gráfica o tabla en la que se analizarán los datos.
4. Conclusión y reporte del estudio. Permite comprobar si obtuvieron las respuestas que pensaron obtener antes del estudio o contradice lo que se esperaba.

Para leer más

Un estudio siempre se hace tomando una pequeña porción de la población, si ésta es muy grande, a esto se le llama *muestra*. Ésta debe conservar las mismas características de la población que se desea estudiar, es decir, debe ser representativa y los elementos que la componen se deben determinar de manera aleatoria, o sea, sin ninguna preferencia sobre algún otro elemento de la población.

Cómo enriquecer la actividad

Induzca a los alumnos a que recuperen la información de sus aciertos y errores. Siempre hay tiempo de modificar conductas, invítelos a hacer un recuento de sus fallas para que con el avance de sus cursos se vayan subsanando.

PRACTÍCALO

Actividad 7.2

1. Al realizar un estudio de cualquier índole, siempre se espera encontrar una o varias posibles respuestas.
   a) A continuación se muestran dos textos, uno en español y otro en mixteco que servirán para hacer un ejercicio en el cual, como en la actividad anterior, se pueden aplicar técnicas de conteo; lean con atención, completen la tabla y respondan las preguntas.

Conocimiento: necesidad vital

"El discurso de la Asociación Mexicana de las Ciencias (AMC) puede cambiar en estilo, pero no en esencia. Si México quiere sobrevivir como país independiente, es urgente un apoyo decidido a la ciencia, las humanidades y al desarrollo tecnológico. Las consecuencias de lo contrario fueron expresadas de manera contundente por Albert Einstein hace 70 años: *solamente serán exitosos los pueblos que entiendan cómo generar conocimientos y cómo protegerlos; cómo buscar a los jóvenes que tengan la capacidad para hacerlo y cómo asegurarse de que se queden en el país. Los otros pueblos se quedaran con litorales hermosos, con iglesias, con minas, con una historia fantástica; pero probablemente no se queden ni con las banderas, ni con las mismas fronteras, ni mucho menos con éxito económico…*".

FUENTE: http://ciencias.jornada.com.mx/investigacion/ciencias-sociales-y-humanas/investigacion/conocimiento-necesidad-vital- Consultada el 11 de marzo de 2013, a las 17.40 horas.

Reflexión

Sobre identificación

Es bueno identificarse con aquellas personas con las que puedes expresarte con libertad, intercambiar ideas y conocimientos, compartir emociones e ideales que te ayuden a ser una mejor persona.

Bitácora pedagógica

Yito Nuchi Kaa

Yitunuhcikaataayitokui,muchikaaSe´echikano, se´ekivikivi in kati. Nuchikaakivikundavinuuviko, yitoxeinuchikanxeitakivi, ye´elo´o, Xeikuise´eye´etaanuchikanaxikinxi, ñandii, muchikaayitose´etayi Kuiasitonimani.

Nuchikanse´exiakuaayivi, chikanuakuchataatachi, se´ekundayiko Yoa´oa, se itase´ekanakuiyaasaxinaayivi. Sakuase´exanxina, Se´e, kundavikudiiñakoyoa´oa, se itase´ekanakuiyaasaxinaayavi. Sakuase´exanxina, se´eyitose´exiakua, xitoseita se taayitotaku, ita se kui, xita -aalo´ose´etachi.

Fuente: Dirección General de Educación Indígena. (2010) *Leamos en lengua mixteca*, México: SEP, pág 15, recuperado de http://issuu.com/dgei_libros/docs/mixteco_10_final- Consultada el 11 de marzo de 2013, a las 14:16 horas.

b) Después de haber leído los dos textos, ¿qué letra es la más utilizada en cada una de estas dos lenguas? Texto uno la letra "e" y en el texto dos es la "a".

c) Elijan cualquiera de los dos textos y hagan el conteo de las letras que se les indican en la siguiente tabla.

A-a	B-b	C-c	Ch-ch	D-d	E-e	F-f	G-g	H-h	I-i
	Se espera que los alumnos elijan el texto para el llenado de esta tabla.								
J-j	K-k	L-l	Ll-ll	M-m	N-n	Ñ-ñ	O-o	P-p	Q-q
R-r	Rr-rr	S-s	T-t	U-u	V-v	W-w	X-x	Y-y	Z-z

- Del texto que eligieron, ¿qué letra es la que más se repite?
- La letra que se repite, ¿es vocal o consonante? Dependerá del texto seleccionado.
- ¿Cuáles son las letras que más aparece en el texto? Dependerá del texto seleccionado.
- Si tuvieran que sacar un porcentaje, ¿cuál le corresponde a cada una de las 10 letras que más se repiten? Se espera que el alumno relacione la frecuencia de la letra con el total de letras en una fracción, lo pase a decimal y posteriormente a porcentaje.
- ¿Cuál es la gráfica más apropiada para representar estos datos? ¿Por qué? Permita que el alumno seleccione el tipo de gráfica más adecuada y que justifique por qué la considera la mejor opción.
- En su cuaderno, representen gráficamente las diez letras que más se presentaron en el texto.
- De los dos textos, ¿en cuál se presentan las consonantes con mayor frecuencia? el texto uno
- ¿Cuál es la vocal que más se utiliza? la "a"

Qué observar

Ponga especial atención a las estrategias que utilizan los alumnos al momento de hacer el conteo y cómo respondieron la pregunta; después, comparta estos procedimientos ante el grupo y analice la conveniencia de cada uno.

Cómo enriquecer la actividad

Permita que los alumnos expliquen los procedimientos seguidos para completar la tabla y que justifiquen qué gráfica consideran la más apropiada para la representación de estos datos y que validen sus respuestas de forma congruente.

Curiosidades, acertijos y más

En una encuesta realizada a 4 300 habitantes europeos por AutoScout24, el mayor mercado europeo de vehículos industriales, obtuvo que al menos un 30 % siente que su automóvil es esencial en su vida. Pida a los alumnos que respondan ¿qué cantidad de personas representa este porcentaje?

Bitácora pedagógica

Qué observar

Observe el desempeño que tienen los alumnos durante la actividad, valore cómo analizan, argumentan y responden la actividad. Es posible que obtenga resultados muy distintos, entonces ponga especial atención al momento de analizarlo con ellos para encontrar los puntos que tengan en común.

Matemáticas 3. Por competencias

- Una vez que realizaron la actividad, ¿se confirmó lo que esperaban en cuanto a las letras que más se utilizan en ambos textos? Esto dependerá de las consideraciones previas que tenga el alumno.
- Si se tomara otro texto de cualquier otra lengua, ¿se obtendría la misma frecuencia de letras que en estos dos textos? No Justifiquen su respuesta.
  Depende de la lengua es la cantidad de letras que se utilizan para formar palabras.
- Si tuvieran que diseñar un estudio similar para otra lengua, ¿cómo lo plantearían?
  RM: De la misma forma en que se planteó esta actividad.
- ¿De qué manera obtendrían los datos? Realizando nuevamente un conteo de las letras usadas.
- ¿Por qué consideran que este método es el más adecuado? Permite tener un control de los datos obtenidos.
- ¿Cómo presentarían los resultados de su estudio? Mediante una representación gráfica.
- ¿Por qué consideran que es la mejor forma de presentar los resultados?
  Porque se puede observar una variación de los datos del estudio.

2. Comparen sus resultados con otros compañeros y comenten si la frecuencia de una muestra varía entre mayor sea el tamaño de la muestra.

PRACTÍCALO

Actividad 7.3

1. Lean con detenimiento el siguiente caso, analicen, argumenten y respondan.

   Es común que la gente vaya al cine a ver una película que sea de su agrado, y para escoger existen muchos y muy distintos tipos de películas: acción, ciencia ficción, comedia, suspenso, terror, drama, etcétera.

   Se piensa que a las personas que les gustan las películas de terror son personas muy valientes.

   a) ¿A qué tipo de personas se debe tomar como muestra de este estudio?
   Permita que el alumno proponga el tipo de personas más adecuado y que justifique por qué.

   b) Estadísticamente se tiene registrado que hay 20 000 personas a las que les gustan las películas de terror, para realizar nuestro estudio, y que sea confiable, ¿a cuántas personas piensas que deben encuestarse?
   Permita que el alumno proponga la cantidad de personas necesarias y que justifique por qué considera este número una muestra representativa confiable.

   c) ¿Cuáles serían las preguntas que se deben plantear para saber si todas las personas a las que les gustan las películas de terror son valientes?
   Permita que el alumno proponga las preguntas necesarias y que justifique la pertinencia de estas para saber con veracidad si las personas son valientes o no.

   d) ¿De qué forma pueden diseñar el estudio? Se espera que el alumno proponga una secuencia, como plantear la situación, elaborar la encuesta, analizar los datos y presentar resultados.

   e) ¿Qué tipo de película consideran que es de la preferencia de sus compañeros de la escuela? Se espera que el alumno valore las preferencias con base en lo que aprendió en esta actividad.

   f) En su cuaderno elaboren una tabla de datos en la que representen el género de la película y la frecuencia que obtuvieron para cada una. Recuerden las recomendaciones de la actividad 7.2.

Cómo enriquecer la actividad

Luego de resolver la actividad y de haber aclarado dudas, esta situación puede dar lugar a diversas preguntas, que pueden ser tanto procedimentales como situacionales, esto le permitirá profundizar y reafirmar los conocimientos del alumno por medio de situaciones interesantes.

Reflexión

Sobre identificación

René Descartes, filósofo y matemático francés del siglo XVII, decía: "Para investigar la verdad es preciso dudar, en cuanto sea posible, de todas las cosas". Pida a sus alumnos que reflexionen y discutan este pensamiento.

Bitácora pedagógica

- Con los datos que acabas de recabar, construye en tu cuaderno la gráfica que sea más representativa al estudio que realizaron, recuerda las recomendaciones de la actividad 7.2. Justifiquen por qué eligieron la gráfica.
- ¿Cuál fue el tipo de película que más les gusta a los encuestados? Dependerá de los resultados obtenidos.
- ¿Cuál es el tipo de película de menos agrado entre los encuestados? Dependerá de los resultados obtenidos.
- ¿Es la respuesta que esperaban desde el inicio del estudio? Dependerá de los resultados obtenidos.
  ¿Por qué? Permita que el alumno valore los resultados y que justifique qué tan acertados fueron sus pronósticos.
- ¿Qué ocurriría con las preferencias si la muestra fuera mayor a la que tomaron para realizar el estudio? Se espera que el alumno concluya que, si tomó una muestra adecuada, los resultados no deben variar mucho.
- ¿Y si fuera menor?

g) ¿A qué conclusión llegaron? Se espera que el alumno concluya que si la muestra se reduce mucho, es posible que no arroje resultados confiables.

2. Comparen sus respuestas con las de los otros equipos, y analicen: ¿si el muestreo se realizara con personas adultas, obtendrían algún resultado semejante al que obtuvieron en la escuela? Justifiquen sus respuestas. Se espera que el alumno concluya que las preferencias pueden cambiar si en vez de estudiar a personas jóvenes, estudia a personas adultas.

Qué observar

Esta situación está muy relacionada con la vida cotidiana de los alumnos y puede utilizarse no solo para incrementar su experiencia y conocimientos matemáticos, sino también para concientizarlos acerca de un tema importante. Observe cómo reaccionan y el interés mostrado durante esta actividad.

PRACTÍCALO

Actividad 7.4

Se quiere determinar si los estudiantes de la escuela se alimentan adecuadamente, es decir, si consumen balanceadamente los cuatro grupos de alimentos.

1. Discutan las siguientes preguntas y respondan.

a) ¿Qué preguntas podrían componer la encuesta para realizar el estudio? Permita que los alumnos propongan las preguntas que consideren necesarias, pida que justifiquen su pertinencia y por qué las consideran adecuadas.

b) Si la población escolar es de 300 alumnos, Andrés dice que sólo se entrevisten a 30 alumnos de un grupo de tercero, ¿consideran que la muestra que quiere tomar Andrés es confiable para nuestro estudio? No

Justifiquen su respuesta. Para que una muestra sea representativa, los elementos que la formen deben ser elegidos totalmente al azar y todos los elementos deben tener la misma posibilidad de ser elegidos.

c) ¿De qué manera podrían averiguar la cantidad de calorías que consumen sus compañeros de la escuela? Por medio de una encuesta.

- ¿Será suficiente con preguntar qué alimentos consumen? No
  ¿Por qué? Una encuesta debe contar con las preguntas necesarias y adecuadas para obtener la información que se desea.

d) Si alguien de sus compañeros consume alimentos chatarra, ¿estará consumiendo las calorías que su cuerpo necesita? No, lo más probable es que consuma más calorías de las necesarias.

Cómo enriquecer la actividad

De momento lo importante es la comunicación y la colaboración que se genere en cada uno de los integrantes del equipo. Probablemente considere factible proponer a la clase emplear recursos y condiciones iguales para todos, es su decisión.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

Los alumnos en primer grado, mediante una encuesta, obtuvieron datos correspondientes a los tipos de alimentos chatarra, biodiversidad, nutrición, etc. Verifique que la manera que representaron sus resultados fueron aplicados con relación a este tema.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Recuerde que esta sección está diseñada para que los estudiantes se autoevalúen y aprendan a reconocer qué es lo que ya saben hacer, qué aprendieron y qué les falta por reafirmar. Observe cómo se comportan y la manera de resolver esta sección, seguramente podrá apoyarlos con base en sus conclusiones.

Cómo enriquecer la actividad

Siempre que sea necesario, y el tiempo lo permita, retome el conocimiento teórico que los alumnos no han alcanzado a desarrollar adecuadamente. No se trata de repetir lo que ya saben, es recomendable buscar una nueva forma, o estrategia, que permita brindarle la seguridad necesaria al alumno sobre sus conocimientos.

e) En los alimentos que consume a diario, ¿están presentes los cuatro grupos principales? No

f) ¿De qué manera se puede medir la cantidad de calorías que debe consumir?

Con base en su edad, estatura y peso.

2. Una vez que decidieron la forma en la que van a recopilar los datos, será conveniente ordenarlos y clasificarlos.

a) ¿Qué tipo de gráfica es la más adecuada para este estudio? Permita que el alumno la seleccione y justifique su conveniencia de uso.

3. Entreguen a su profesor el estudio que realizaron, incluyendo las preguntas, la tabla, la gráfica y la conclusión sobre los resultados.

4. Comparen sus resultados y gráficas con los de otros equipos, bajo la supervisión del profesor expónganlos ante el resto del grupo y obtengan una conclusión general.

LO QUE APRENDÍ

1. Seleccionen una de las siguientes preguntas para investigar, o realicen otro estudio que les llame la atención:

¿Cuál es el peso de los estudiantes de su escuela?
¿Qué programa de televisión es el favorito de los estudiantes?
¿Qué tipo de música es del agrado de los estudiantes?

a) Anoten algún otro tema de estudio que se podría realizar. Depende del alumno.

b) ¿Qué grupo o población utilizaron? Expliquen por qué.

Depende del alumno, ya que hay que verifique que justifiquen cómo decidieron cuál sería la población

c) ¿De qué manera diseñaron la encuesta que aplicaron?

Verifique que se cumpla con todas las etapas para la elaboración de la encuesta.

d) ¿Qué estrategia utilizaron para clasificar las respuestas obtenidas?

Verifique que se cumpla con todas las etapas para la elaboración de la encuesta.

e) ¿Cuál fue el criterio que tomaron para seleccionar la representación gráfica más adecuada? Expliquen por qué Dependerá de la representación gráfica de cada alumno.

f) ¿Cuáles son los beneficios que se pueden obtener del estudio que realizaron?

Depende del alumno. Verifique que sea posible tomar acciones para mejorar la situación dependiendo de cada encuesta.

g) Existe alguna otra estrategia que les permita encontrar mejores resultados? No

Justifiquen su respuesta.

Lo mejor es realizar un estudio adecuado de una población con base en un problema determinado

h) ¿Cuál de las situaciones propuestas consideran que tiene mayor relevancia para una población? Expliquen por qué Permita que el alumno decida cuál, argumente sus razones y justifique su decisión

2. Escriban sus conclusiones y entreguen el reporte a su profesor.

Bitácora pedagógica

Desarrolla tus habilidades

Como sabes, el tipo de gráfica que se utiliza para representar un estudio depende de cómo se organicen los datos en una tabla.

1. Analiza las siguientes tablas, cada una muestra un tipo de estudio diferente. Contesta lo que se te indica.

Tabla 1	
Aciertos	Frecuencia
0 – 6	4
7 – 15	19
14 – 20	7

Tabla 2	
Aciertos	Medida del sector
0 – 6	48°
7 – 15	228°
14 – 20	84°
Total	360°

Tabla 3	
Mes	Precio del huevo ($)
Enero	24.5
Febrero	30
Marzo	43
Abril	31.5
Mayo	37.5

Tabla 4	
Película	Conteo
Suspenso	45
Acción	33
Terror	66
Comedia	18
Ciencia ficción	54
Total	216

- ¿Qué tipo de gráfica consideras que es adecuada para presentar los datos de la tabla 1? Barras ¿Por qué? Es más adecuada por manejar intervalos.
- ¿Qué tipo de gráfica consideras que es adecuada para presentar los datos de la tabla 2? Circular ¿Por qué? Por tratarse de medidas angulares.
- ¿Qué tipo de gráfica consideras que es adecuada para presentar los datos de la tabla 3? Líneas ¿Por qué? Por tratarse de representar una variación.
- ¿Y para los datos de la tabla 4? Barras ¿Por qué? Por tratarse de la preferencia de las personas.
- ¿Por qué es conveniente utilizar distintos tipos de representación gráfica y no sólo una para todo tipo de datos? Porque cada gráfica tiene un propósito diferente.
- ¿En qué consiste determinar cuál representación gráfica es más conveniente, según los datos que representa? En que permita interpretar mejor los resultados.
- ¿Cuál es la ventaja de presentar los datos en una gráfica acorde a cada problema? Permite tomar decisiones con base en los resultados.

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenten si se puede representar con la misma gráfica datos de las tablas que se mostraron de ejemplo.

USA LAS TIC

En la siguiente página electrónica http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b01_t07_s01_interactivo/index.html (Consultada el día 24 de octubre de 2012, a las 11:13 horas), encontrarás un programa interactivo que te permitirá representar datos en una gráfica. Realiza los ejercicios y comenta tus resultados con tus compañeros, si es posible auxíliate para comparar las gráficas que elaboraste en este contenido.

Qué observar

Esta sección permite manejar al mismo tiempo muchos conocimientos, criterios y conceptos que dependen de la interpretación y el razonamiento correcto de la persona que lo desarrolla. Vigile cómo resuelven la actividad y la forma en que aplican todos los recursos que aprendieron y, de ser necesario, tome las acciones que crea pertinentes.

Cómo enriquecer la actividad

Si tiene el tiempo disponible, pida a los alumnos que representen gráficamente estas tablas en su cuaderno, usando distintos tipos de gráficas y que valoren cuál usar, dependiendo de los datos de cada tabla.

Cambiando números

Indique al alumno que en las tablas 1 y 2, en la columna de aciertos, tome en cuenta la cantidad de 16-20.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Procure que al resolver la evaluación se tengan las mejores condiciones. Prepare lo que sea necesario para que nada incomode la prueba, y antes de aplicarla oriente a los alumnos en la forma como está diseñada para tratar de disminuir lo más posible las dudas durante la aplicación.

Cómo enriquecer la actividad

Motive a los alumnos para que resuelvan esta evaluación de forma honesta. Resalte su importancia y la utilidad que puede tener para mejorar su nivel actual de conocimientos. Procure que tomen la evaluación como algo habitual, bueno y sano, es decir, como parte del proceso de aprendizaje de las Matemáticas.

Cambiando números

Indique a los alumnos que para poder responder sí o no, en el inciso b) de la pregunta 2, tomen en cuenta a H, M, BC, GH y LM como ángulos y no como segmentos.

Matemáticas 3. Por competencias

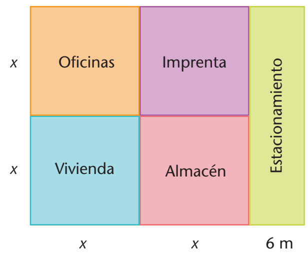
Evaluación tipo PISA

Lee y analiza detenidamente cada situación y responde según lo que se indique.

1. Arturo compró un terreno con la intención de tener su negocio de imprenta y su casa juntos, ahora está iniciando y su terreno es mediano, mide 720 m^2.

   Observa el esquema y responde: ¿cuál es la expresión algebraica en su forma más simple que permite conocer las dimensiones del terreno?

a)	$\underline{2x^2 + 6x - 360 = 0}$
b)	$4x^2 + 12x - 720 = 0$
c)	$x^2 + 3x - 180 = 0$
d)	$2x(2x + 6) = 720$



- ¿Cuál es el valor de x? 12
- ¿Cuál es la relación entre el área de estacionamiento y al área de las secciones cuadradas?

  Tienen la misma superficie, pero diferente forma.

2. Arturo se compró un rompecabezas cuando visitó la feria del libro, en él hay piezas que tienen la misma forma, aunque pueden ser de distintos tamaños. Observa las piezas mostradas a continuación:

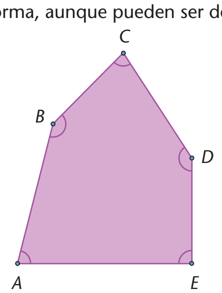


Figura 1

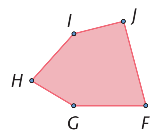


Figura 2

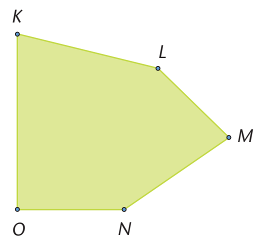


Figura 3

Si se sabe que las figuras mostradas tienen la misma forma, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta? Encierra "sí" o "no", dependiendo de cada enunciado.

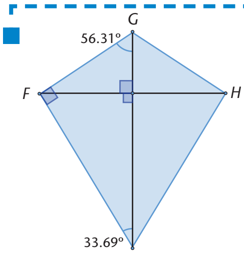
a) La figura 2 es semejante a la figura 1 y congruente a la figura 3 porque todas tienen la misma forma.	Sí	<u>No</u>
b) El ángulo C tiene la misma amplitud que el ángulo $\overline{H}$ y el ángulo $\overline{M}$. Los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{GH}$ y $\overline{LM}$ son correspondientes.	<u>Sí</u>	No
c) El segmento $\overline{AB}$ tiene la misma longitud que el segmento $\overline{KL}$ y que el segmento $\overline{GF}$ y los ángulos que se encuentran en los extremos de cada segmento también son iguales.	<u>Sí</u>	No
d) La figura 2 es semejante a la figura 1, pero sus ángulos son más pequeños.	Sí	<u>No</u>

Bitácora pedagógica

BLOQUE 1

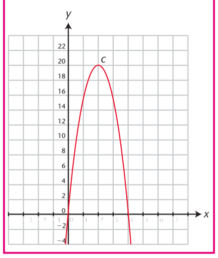
Evaluación tipo PISA

3. Marco acaba de comprar un papalote, le llamó la atención su forma geométrica y piensa que está hecho a base de triángulos que son semejantes. Analiza la figura y responde, de qué manera es posible demostrar que los triángulos *GEF*, *HEF* y *GHF* son semejantes. Valorando si sus tres ángulos son iguales, y si sus lados son proporcionales. Es de utilidad apreciar que la figura muestra dos triángulos congruentes y un tercer triángulo que no es semejante a los otros dos.

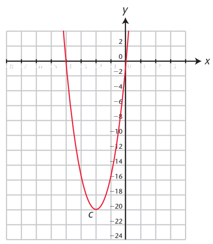


4. ¿Cuál opción contiene la tabla y la gráfica que corresponde a la ecuación $y = -5x^2 + 20x$? Considera a x como el tiempo, y a y como la altura.

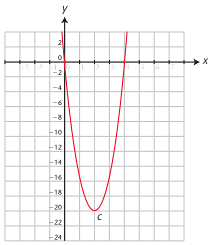
x	y
−1.	−25.
0.	0.
1.	15.
2.	20.
3.	15.
4.	0.
5.	−25.



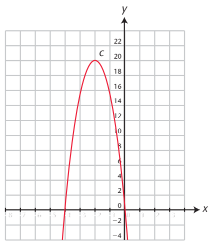
x	y
−1.	25.
0.	0.
1.	−15.
2.	−20.
3.	−15.
4.	0.
5.	25.



x	y
−5.	25.
−4.	0.
−3.	−15.
−2.	−20.
−1.	−15.
0.	0.
1.	25.



x	y
−5.	−25.
−4.	0.
−3.	15.
−2.	20.
−1.	15.
0.	0.
1.	−25.



5. Considera el experimento de lanzar una vez un dado, y con esta base escribe sobre la línea si los eventos dados son complementarios, mutuamente excluyentes o independientes.
   - Que salga un número par o un número impar Mutuamente excluyentes
   - Que salga un número mayor que 3 o un múltiplo de 2 Complementarios
   - Que salga un 4 o un número primo Independientes

6. Se quiere conocer si los estudiantes de los grupos de tercero de una secundaria tienen buenos hábitos de sueño, ¿cuál de los incisos muestra la manera en la que se debe realizar este estudio?

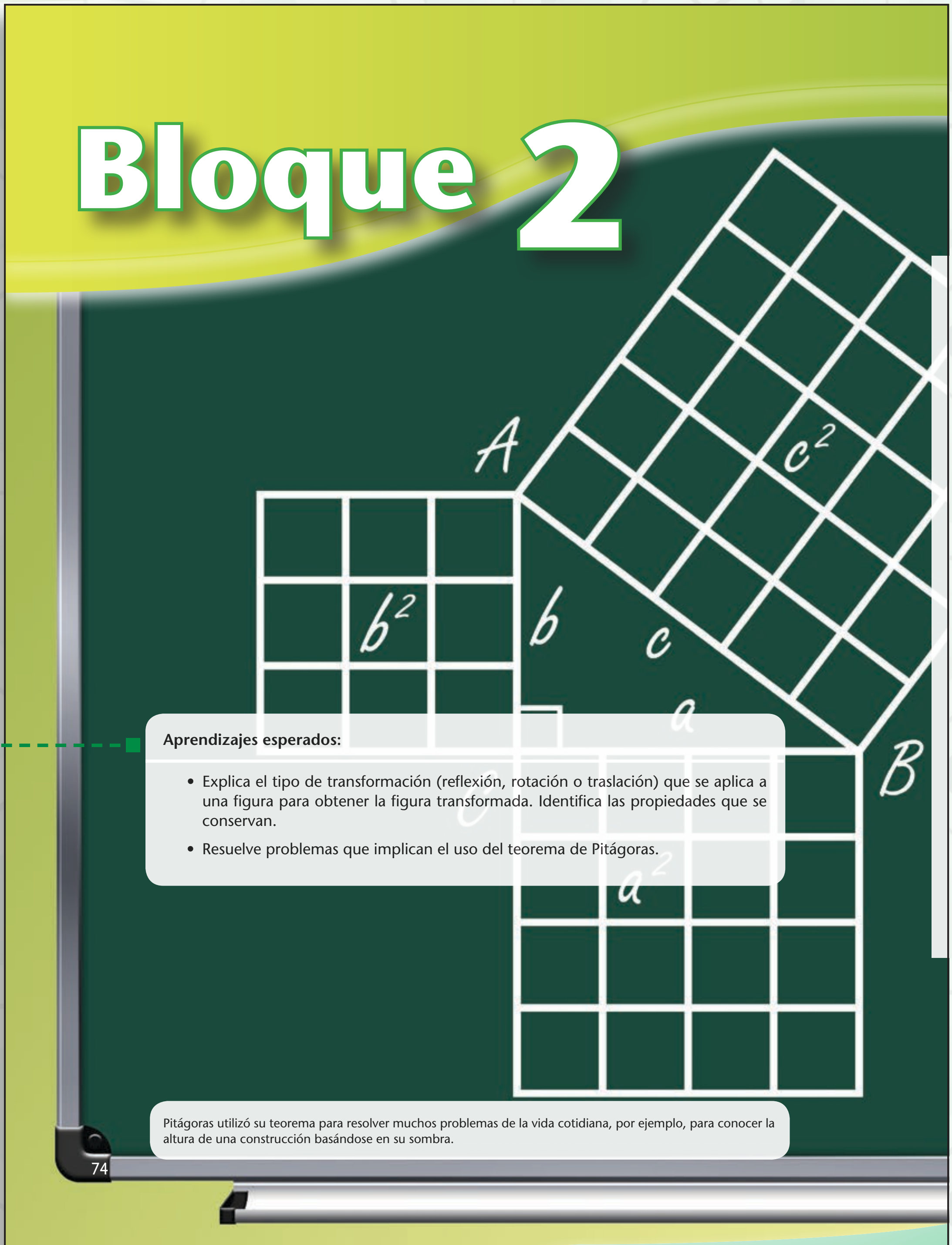
a) Establecer una pregunta, elegir al azar una cantidad de alumnos para realizar una encuesta, contabilizar los datos y presentarlos en una tabla	Sí	No
b) Seleccionar la muestra de una población, elaborar un cuestionario y luego obtener los datos realizando entrevistas.	Sí	No
c) Elaborar una encuesta, determinar la población, seleccionar la muestra, obtener los datos y presentarlos de manera gráfica.	Sí	No
d) Elaborar una encuesta, entrevistar a todos los elementos de la población, y presentar los resultados de manera gráfica.	Sí	No

Cambiando números

Indique al alumno que para resolver la pregunta 3, debe agregar el vértice "E".

Bitácora pedagógica

73



Bloque 2

Aprendizajes esperados:

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Pitágoras utilizó su teorema para resolver muchos problemas de la vida cotidiana, por ejemplo, para conocer la altura de una construcción basándose en su sombra.

74

Qué observar

Pida a los alumnos que lean de forma cuidadosa lo que se espera que aprendan en este bloque.

Que a partir de este momento deben concentrarse y preguntar todas las dudas que vayan surgiendo durante los temas que se presentan.

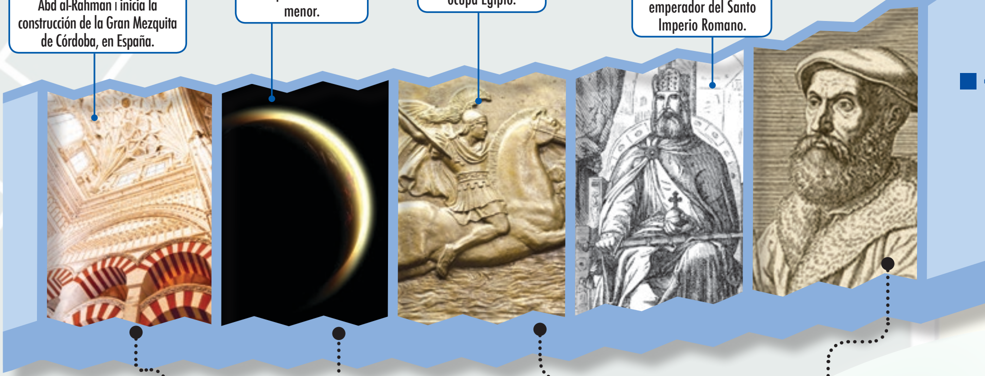
Contexto histórico

706 a.n.e.
Abd al-Rahman I inicia la construcción de la Gran Mezquita de Córdoba, en España.

585 a.n.e.
Tales de Mileto predice un eclipse solar en Asia menor.

332 a.n.e.
Alejandro Magno ocupa Egipto.

753
Carlomagno se coronó emperador del Santo Imperio Romano.



Hechos matemáticos

605 a.n.e.
En India, por primera vez se acepta el uso de la notación decimal.

410 a.n.e.
Hypatia de Alejandría es la primera mujer mencionada en la historia de las matemáticas.

150 a.n.e.
Ptolomeo hace aportaciones al estudio de la trigonometría.

1525
El matemático alemán Christoff Rudolff utiliza por primera vez el símbolo actual de la raíz cuadrada.

75

Cómo enriquecer la actividad

Aproveche la línea del tiempo para que los alumnos lean ciertos acontecimientos históricos de la cultura en general, o de las propias Matemáticas. Comente acerca de ello y practiquen el cálculo mental, por ejemplo: ¿hace cuántos años Alejandro Magno ocupó Egipto? ¿Hace cuántos años Ptolomeo dio sus aportaciones a la trigonometría?

Dentro del salón de clases, realicen comentarios de manera grupal acerca de las aportaciones que hizo Ptolomeo y Christall Rudolff.

Qué observar

Indague mediante preguntas, el nivel de comprensión que adquirió el grupo en relación con las ecuaciones de segundo grado. Probablemente sea conveniente que resuelva el primer problema, valiéndose de las ideas que aporten los alumnos.

Cómo enriquecer la actividad

Esta actividad está diseñada para trabajarse en parejas. Pida a una de las parejas que exponga cómo resolvió esta situación y responda las inquietudes del resto del grupo. Si es necesario, pase a otra pareja que obtuvo el mismo resultado, pero con una estrategia diferente, esto permitirá la realimentación en el grupo.

Recursos y materiales

En la página de *Habilidades Digitales* encontrará material de utilidad para preparar sus clases con el tema que se está viendo actualmente.

http://www.hdt.gob.mx/new_media/secundaria_3/matematicas_b2/oda_2548_10027/recurso/

Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido 1	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

ACUÉRDATE DE...

Las figuras geométricas tienen aplicaciones en casi todas las formas que percibimos.

1. ¿Recuerdan la fórmula para calcular el área de un trapecio?, ¿cómo se pueden representar sus datos por medio de expresiones algebraicas?

   a) Analicen los siguientes trapecios.

Figura A

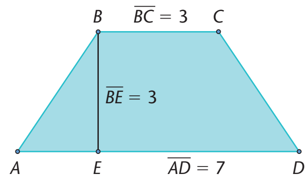
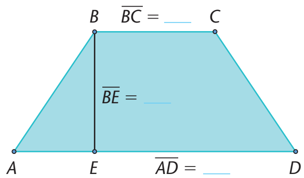


Figura B



- ¿Cuál es el área de la figura A? 15u^2
- ¿De qué manera encontraron esta medida? Usando la fórmula $A = \frac{(B + b)\,h}{2}$

   b) En la figura B representen sobre las líneas el valor de cada segmento, ahora en términos de x.

- Definan qué expresión le corresponde a la altura y cuál a la base menor. x
- Siguiendo la fórmula del área del trapecio, diseñen una expresión algebraica que represente el área total de la figura B, e igualen esta expresión con el área que obtuvieron de la figura A.

  $15 = \frac{[(x + 4) + x]x}{2}$ Al reducirla queda $x^2 + 2x - 15 = 0$
- ¿Cuál es el máximo exponente de esta expresión? 2 Esto, ¿qué representa gráficamente?

  Que se trata de una parábola.
- Escriban de forma ordenada las operaciones que hicieron para obtener la expresión algebraica.

  $15 = \frac{[(x + 4) + x]x}{2}$ $\quad 15 = \frac{(2x + 4)x}{2}$ $\quad 15 = \frac{(2x^2 + 4)x}{2}$ $\quad 15 = x^2 + 2x$

  Ordenando queda $x^2 + 2x - 15 = 0$
- ¿De qué manera pueden comprobar que su expresión es correcta? Resolviendo la ecuación

  Los resultados son $x_1 = 3$ $\quad x_2 = -5$ como se trata de una distancia el valor adecuado es $x_1 = 3$

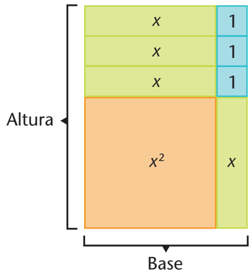
2. Contrasten sus respuestas con las de dos o tres parejas cercanas y, con la ayuda de su profesor, analicen si la expresión algebraica está bien planteada.

Bitácora pedagógica

PRACTÍCALO **Actividad 1.1**

1. En segundo grado trabajaron con bloques que representan expresiones algebraicas, utilicen ahora esa experiencia y tomando como base las conclusiones de la actividad inicial, resuelvan lo que se pide.

   a) Analicen la siguiente figura y escriban, con las superficies indicadas, la expresión algebraica que representa su área total. $x^2 + 4x + 3$

   - ¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente a la base del rectángulo? $x^2 + x$
   - ¿Qué expresión algebraica representa la altura del rectángulo? $x + 3$

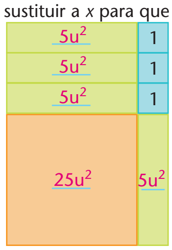
   b) Si el rectángulo, en total, contiene 48 unidades cuadradas como las indicadas con color azul, ¿cuántas u^2 tiene cada rectángulo de color verde? $5u^2$

   - ¿Cuántas u^2 tiene el cuadrado naranja? $25u^2$
   - ¿Qué estrategia utilizaron para calcular las medidas de cada figura? Primero se determina el valor de x con base en la superficie de 48 unidades. Quedaría $(x2 + x)(x + 3) = 48$

   c) Con base en las medidas que determinaron, anoten dentro de la siguiente figura las unidades cuadradas correspondientes a cada sección del rectángulo.

   d) Escriban la expresión algebraica que en esta ocasión iguala a cero, ¿qué valor debe sustituir a x para que la igualdad se cumpla? $x^2 + 4x + 3 = 0$ Sus raíces son $x_1 = 5$ y $x_2 = -9$

   La medida adecuada es $x_1 = 5$ por tratarse de una distancia.

   - Comenten con sus compañeros si existe un valor único que cumpla la condición anterior, de no ser así, analicen la pertinencia de otro valor como solución al problema.

2. Comparen sus resultados y, con la ayuda del profesor, comenten cómo se puede conocer el valor de los lados de un rectángulo de cuya superficie sólo se conoce la expresión algebraica que representa su área.

PRACTÍCALO **Actividad 1.2**

1. Para trabajar con expresiones algebraicas como las usadas en la actividad anterior es necesario saber hacer las operaciones necesarias de manera ordenada y concreta, donde la medida de los lados es resultado de factorizar el trinomio que representa el área del rectángulo.

   a) Lleven a cabo este proceso para los siguientes trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y encuentren los binomios que dieron origen a estos productos.

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	Binomios con término común
$x^2 + 7x + 12$	( )( ) $(x + 3)$ $(x + 4)$
$x^2 + 5x - 24$	( )( ) $(x - 3)$ $(x + 8)$
$x^2 - 8x - 15$	( )( ) $(x - 5)$ $(x - 3)$

Qué observar

Observe que los alumnos toman de manera correcta la base y la altura, para que escriban la ecuación cuadrática correspondiente.

Deles tiempo para que la planteen y observe cómo realizan la reducción de términos semejantes.

Cómo enriquecer la actividad

Si es necesario, proponga nuevos ejercicios para que el alumno comprenda la resolución de estos mediante el método de factorización. Pida a una pareja que exponga cómo obtuvieron el resultado. Permita el intercambio de ideas, será de provecho para el grupo.

Cambiando números

Indique al alumno que la expresión

$x^2 - 8x - 15$

la cambie por

$x^2 - 8x + 15$

Posteriormente, solicite que encuentre el binomio que dio origen al producto.

Bitácora pedagógica

Qué observar

En esta actividad observe que la expresión cuadrática se debe de igualar a $72u^2$, y posteriormente se iguala a cero. Pida que reduzcan los términos semejantes para que se aplique la factorización.

Cómo enriquecer la actividad

Dé el tiempo necesario para que los alumnos encuentren el valor de x. Si es necesario, que justifiquen cómo lo obtienen.

Proponga nuevos ejercicios para que el alumno tenga un mejor manejo de este método.

Reflexión

Sobre la responsabilidad

Ser responsable es cumplir con nuestros deberes, obligaciones y promesas, así como aceptar las consecuencias de lo que hacemos y dejamos de hacer.

Matemáticas 3. Por competencias

- Describan, de forma breve, cuál es el procedimiento para factorizar este tipo de trinomios. Se buscan dos números que multiplicados den el valor de c y que al mismo tiempo sumados o restados den el valor de b en la expresión $ax^2 + bx + c$.
- Expliquen de qué manera se puede comprobar que la factorización se hizo correctamente. Desarrollando los binomios obtenidos, si al simplificar se obtiene el mismo trinomio. Entonces la factorización es correcta.
- ¿Consideran que es posible encontrar otra manera de realizar la factorización? Si
  Justifiquen su respuesta y coméntenla con algunos de sus compañeros.

b) Si de la tabla anterior relacionan la expresión $x^2 + 7x + 12$ con la superficie de un rectángulo con un valor de $72u^2$ entonces:

- ¿Cómo queda expresada la ecuación cuadrática? $x^2 + 7x + 12 = 72$
- Escriban la ecuación igualando su segundo miembro a cero. $x^2 + 7x + 12 - 72 = 0$
  $x^2 + 7 - 60 = 0$
- Si aplican el proceso de la factorización, ¿cuáles son los binomios que se obtienen?
  $(x - 5)(x + 12)$
- Entonces, ¿qué valores se pueden sustituir en la ecuación original para que al realizar las operaciones indicadas el resultado sea cero? $x_1 = 5$ y $x_2 = -12$
- ¿Cómo es posible determinar estos valores a partir de la factorización? Cada binomio se iguala con cero y se despeja la literal.

2. Encuentren los valores que hacen verdaderas las siguientes ecuaciones cuadráticas completas de la forma $x^2 + bx + c$.

a)	$x^2 + 8x + 15 = 63$	$x_1 = 4$	$x_2 = -12$
b)	$x^2 + 5x - 24 = 42$	$x_1 = 6$	$x_2 = -11$
c)	$x^2 - 6x - 27 = -11$	$x_1 = 8$	$x_2 = -2$

- Expliquen, ¿por qué en estas ecuaciones son dos los valores que las hacen verdaderas? Porque ambos valores al sustituirse en la ecuación y desarrollarse cumplen con la igualdad.
- Si se considera que la ecuación representa una igualdad con la medida de una superficie y al resolverla se obtienen dos raíces o soluciones, ¿ambos valores resuelven correctamente la ecuación? Expliquen su respuesta. Si un valor es negativo no se puede relacionar con una distancia, además es común que solo uno de los valores sea adecuado para dar solución a una situación.
- Al seleccionar solamente un valor para x, ¿cómo se determina cuál de los dos es el adecuado? Se toma el valor que cumpla con las condiciones del problema, es común que se tome el valor positivo.
- Analicen y escriban en su cuaderno, ¿en qué hechos de la vida cotidiana se utilizan este tipo de ecuaciones o procedimientos?

3. Comparen sus resultados con los de algunas parejas cercanas y elaboren una descripción formal que explique cuál es el proceso para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$

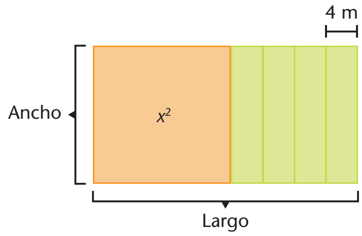
Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

PRACTÍCALO **Actividad 1.3**

1. Los bloques algebraicos se utilizan de formas distintas para representar varias operaciones, una de ellas está presente en la figura mostrada; para deducirla analiza el siguiente modelo geométrico y responde las preguntas.

   a) El tío de Rubén tiene una bodega con estacionamiento para 4 camiones de carga, como lo muestra la imagen.



- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el total del área, incluyendo los estacionamientos? $x^2 + 4x$
- ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la medida del frente de la bodega, es decir, el largo? $x + 4$
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el ancho de la bodega? x
- ¿Qué factor tienen en común el ancho y el largo de la bodega? x
- Para formar una ecuación cuadrática es necesario igualar la expresión algebraica del área a cero, ¿cómo queda la ecuación? $x^2 + 4x = 0$
- ¿Qué valores puede tomar x para que la igualdad sea verdadera? $x_1 = 0$ $x_2 = -4$

   b) Usemos las medidas de la base y la altura para hacer la factorización del área, pero ¿de qué manera se pueden determinar los dos números que hacen verdadera la ecuación? Factorizando la ecuación

2. Encuentra los dos valores que hacen verdaderas las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - 5x = 0$	$x_1 =$ $x_1 = 5$	$x_2 =$ $x_2 = 0$
b) $x^2 + 2x = 0$	$x_1 =$ $x_1 = 0$	$x_2 =$ $x_2 = -2$

- ¿Qué características comunes puedes deducir en los resultados que obtuviste? Que una de las variables siempre es cero.
- ¿Consideras que siempre ocurrirá lo mismo en todas las ecuaciones de este tipo? Sí
  Explica porqué. Gráficamente este tipo de ecuaciones uno de sus puntos siempre pasa por el origen del plano cartesiano, este valor siempre va a ser cero, que es el que corresponde a una de las "x".
- Es necesario saber determinar cuál de los dos posibles resultados es el más pertinente en la solución a un problema. Comenta con tus compañeros algunos ejemplos en los que una raíz negativa podría ser la solución a un problema. Por métodos aritméticos no es posible obtener la raíz cuadrada de un número negativo.

3. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y con la ayuda de tu profesor explica cuáles son las características principales de las raíces o soluciones de una ecuación cuadrática incompleta mixta.

Qué observar

Mediante el siguiente modelo, observe que los alumnos realizan de manera adecuada el planteamiento para encontrar el área de la figura.

Observe que realicen la demostración y justifiquen cuál es el valor de x más adecuado.

Cómo enriquecer la actividad

Permita a los alumnos que propongan situaciones para encontrar los valores de x y y, pregunte por qué se utiliza un solo valor de x y no los dos.

Pídales que en su cuaderno realicen la demostración y justifique sus procedimientos.

Transversalidad

Formación Cívica y Ética

Si nos equivocamos al decir o hacer algo, hay que admitirlo. Solo así se podrá aprender de nuestros errores y no tendremos que repetirlos.

Pida a los alumnos que soliciten al profesor de Cívica y Ética hablar sobre la honestidad y coméntenlo en clase.

Al aprender Matemáticas, la honestidad es esencial, si no entiendes un procedimiento o un tema dilo, no te quedes con la duda.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Dé tiempo para que los alumnos observen esta información; posteriormente pida a un alumno que lo explique con sus propias palabras.

Observe que comprenden de forma adecuada la ley de los signos, para que de esta forma se tenga en mejor control sobre sus procedimientos.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que reproduzcan en una cartulina la situación que se tiene, para que puedan comprender la actividad; de ser necesario, proponga otras dimensiones.

Seleccione a un equipo para que exponga sus resultados y procedimientos, y responda las preguntas de sus compañeros. Si es necesario, intervenga.

Recursos y materiales

Le recomendamos la siguiente página:

www.alcaste.com/departamentos/matematicas/presentaciones/pol_frac.pps

En ella encontrará diferentes presentaciones que podría utilizar para exponerlas a los alumnos, y de esa manera enriquecer su clase.

Para tener en cuenta

Este tipo de ecuaciones cuadráticas $x^2 + bx = 0$ carecen de término independiente, sólo contienen al término de segundo grado y al de primer grado, por ello reciben el nombre de ecuaciones cuadráticas incompletas mixtas.

Para resolver una ecuación cuadrática completa de la forma $x^2 + bx + c = 0$ donde el coeficiente del término de segundo grado es 1, por el método de factorización, se puede optar por el siguiente procedimiento:

1. Se abren dos paréntesis para colocar los binomios conjugados.
2. Se obtiene la raíz del término de segundo grado y se coloca como factor común en ambos binomios.
3. Se deben buscar dos números que multiplicados den el valor de c, y sumados den el valor de b.
4. Se colocan los signos que hacen verdaderas las dos condiciones anteriores.
5. Cada uno de los binomios se iguala a cero y se despeja el valor de x para obtener las dos raíces o soluciones a la ecuación.

A continuación, se ejemplifica cada uno de los puntos anteriores:

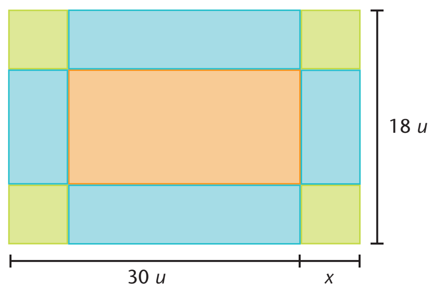
1.	$x^2 - 5x - 36$	$= (\quad)(\quad)$		
2.	$x^2 - 5x - 36$	$= (x \quad)(x \quad)$		
3.	$(\quad)(\quad)$	$= c$	$(4)(-9)$	$= -36$
	$(\quad) + (\quad)$	$= b$	$(4) + (-9)$	$= -5$
4.	$x^2 - 5x - 36$	$= (x - 9)(x + 4)$		
5.	$(x - 9)$	$= 0$	$(x + 4)$	$= 0$
	x	$= 9$	x	$= -4$

PRACTÍCALO — **Actividad 1.4**

En las secciones anteriores trabajaron con ecuaciones de segundo grado representándolas en esquemas y resolviendo algoritmos algebraicos. Veamos ahora un problema en donde se aplican las ecuaciones cuadráticas.

1. En una fábrica de productos de cartón están elaborando tapas para cajas con las medidas mostradas en la figura.

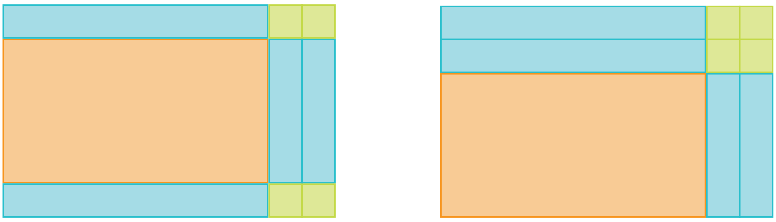
   a) En el siguiente modelo se encuentran representadas las secciones con las que es posible hacer la tapa de una caja de cartón utilizando un pliego de 936 cm² de área. Analicen el esquema anterior y compárenlo con la imagen de la caja ya formada.



Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

b) Los cuadrados de color verde se van a cortar para poder formar la tapa; ahora, si cada superficie se reacomoda es posible formar un modelo que permita analizar más fácilmente sus dimensiones.



- ¿Cuáles son las medidas del largo y del ancho del rectángulo naranja? 30 − 2x de largo y 18 − 2x de ancho
- ¿Cuáles son las dimensiones de los rectángulos azules? x(30 − 2x) de largo, y x de ancho
- Considerando la figura en su totalidad, ¿cuáles son las medidas del largo y ancho? 30 de largo por 18 de ancho
- ¿En cuál de los tres modelos consideran que es más fácil encontrar las dimensiones de cada sección? Expliquen su respuesta. En el tercero. Porque las pieza están juntas y ordenadas.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total? $-x^2 - 24x + 135 = 270$
- ¿Cuál es el valor de x? 4.7 u

2. Comparen sus resultados con los de un equipo cercano y con la ayuda del profesor describan qué elementos deben considerarse para modelar un problema mediante una ecuación cuadrática.

PRACTÍCALO

Actividad 1.5

Muchas superficies distintas pueden estar relacionadas con expresiones algebraicas de segundo grado. Para ello las ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx + c = 0$, así como su respectiva factorización en forma de binomios con término común de la forma $(x + a)(x + b) = 0$, están igualadas a cero.

1. Lean las preguntas y reflexionen antes de responder:
   a) ¿Qué condición se debe cumplir para que el producto de una multiplicación sea cero? Que un factor sea cero.
   Expliquen su respuesta. Todo número multiplicado por cero, da cero.
   b) ¿Será posible encontrar dos números distintos de cero que al multiplicarse den cero? No
   Justifiquen su respuesta. No
   c) ¿Cuál es la factorización del trinomio $x^2 - 9x + 18 = 0$? $(x - 6)\ (x - 3)$
   d) ¿Qué valor de x permite que el primer factor sea igual a cero? 6
   e) ¿Qué valor de x permite que el segundo factor sea igual a cero? 3
2. Contrasten sus resultados y en forma grupal elaboren una definición formal para saber, cuál es la condición necesaria para que al multiplicar dos términos el producto sea igual a cero. Analicen su definición y concluyan por qué consideran que es la más adecuada.

Qué observar

Dé el tiempo necesario para que los alumnos analicen cómo es que se movieron las figuras de posición y puedan comparar sus resultados del inciso a), con el área obtenida de este inciso.

Que noten la diferencia de las dos expresiones algebraicas que se obtienen de ambos incisos y justifiquen cada uno de los resultados a los que llegaron.

Cómo enriquecer la actividad

A través de una lluvia de ideas, permita que el alumno responda otras preguntas que plantee y que vayan encaminadas a la igualación a cero de una expresión cuadrática, así como la factorización.

Pregunte a los alumnos ¿cuál es la finalidad de igualar a cero?

Curiosidades, acertijos y más

Proponga el siguiente acertijo.

Dados tres números naturales pares consecutivos se sabe que si al cuadrado del mayor se le resta el cuadrado de los otros dos se obtiene el número –20. ¿Cuáles son esos tres números?

Bitácora pedagógica

Qué observar

Dé a los alumnos el tiempo necesario para que respondan esta actividad, que esta basada con las respuestas que dieron en la actividad anterior.

Observe que utilizan de manera correcta los signos en cada uno de los paréntesis, así como la forma de comprobar la igualdad para cada uno de los valores de *x*.

Cómo enriquecer la actividad

La siguiente situación está diseñada para trabajarse en parejas. Pida que comparen sus resultados con sus compañeros de grupo y observen sus diferencias o similitudes. Recorra el salón de clases con la finalidad de aportar, si así lo considera necesario, ayuda que les permita a los alumnos terminar la actividad o discusión.

Reflexión

Sobre la responsabilidad colectiva

Qué tienen que hacer los alumnos, como grupo, para cumplir sus metas: cada integrante debe respetar su compromiso con los demás, es decir, actuar en equipo para el bien del grupo.

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 1.6

1. Retomen las respuestas anteriores y completen la tabla, luego analicen sus resultados para construir modelos con bloques algebraicos, encuentren los dos valores de x para cada ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$ de la forma que permitan obtener cero al multiplicar los binomios que se obtienen al factorizar. Suponiendo que cada una de estas expresiones representa una superficie de manera similar a la tapa de cartón de las actividades anteriores.

Ecuación	Factorización	Raíces de x
$x^2 + 3x - 4 = 0$	$(x - 1)(x + 4)$ ( )( ) = 0	$x_1 =$ $x_1 = 1$ $x_2 =$ $x_2 = -4$
$x^2 - 35x + 150 = 0$	$(x - 30)(x - 5)$ ( )( ) = 0	$x_1 =$ $x_1 = 30$ $x_2 =$ $x_2 = 5$
$x^2 - x - 6 = 0$	$(x - 3)(x + 2)$ ( )( ) = 0	$x_1 =$ $x_1 = 3$ $x_2 =$ $x_2 = -2$
$x^2 + 4x + 3 = 0$	$(x + 1)(x + 3)$ ( )( ) = 0	$x_1 =$ $x_1 = -1$ $x_2 =$ $x_2 = -3$

2. En su cuaderno, construyan un modelo geométrico que represente cada una de las ecuaciones dadas en el cuadro anterior.
3. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y, con la ayuda de su profesor establezcan formalmente cuál es el proceso para resolver una ecuación cuadrática por factorización.

Para leer más

Una ecuación de segundo grado o cuadrática donde el coeficiente del término de segundo grado es 1, se resuelve obteniendo los factores que forman los binomios con término común, y encontrando los valores que vuelven cero a cada uno de estos factores.

LO QUE APRENDÍ

1. El Señor Medina quiere comprar un terreno, le ofrecen tres diferentes opciones de compra, cada una está dada por las siguientes expresiones algebraicas. Resuelvan las ecuaciones en su cuaderno y contesta las preguntas:

a) $x^2 - 14x + 48 = 0$ $x_1 = 8$ $x_2 = 6$ b) $x^2 - 10x + 16 = 0$ $x_1 = 8$ $x_2 = 2$ c) $x^2 - 8x + 15 = 0$ $x_1 = 5$ $x_2 = 3$

- Suponiendo que el valor que el Sr. Medina propuso equivale a que x tenga un valor de 20 unidades lineales, ¿cuál de las tres opciones representa un terreno más grande? El terreno del inciso a.

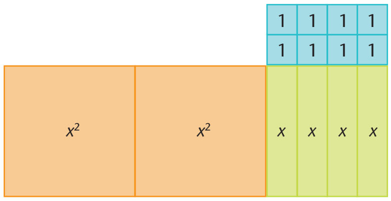
  Argumenten su respuesta. Es la ecuación que permite tener el terreno con dimensiones más grandes.
- ¿Qué estrategia utilizaron para determinar la mejor opción? Resolver las ecuaciones y comparar sus resultados.
- ¿Consideran que existe algún otro método para resolver este problema? Resolver las ecuaciones y comparar sus resultados.

  Justifiquen su respuesta. Existen varias formas de resolver una ecuación de segundo grado, o bien se podrían buscar los resultados por ensayo y error, solo que esto es muy tardado.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

d) Después de valorar la distribución de las áreas, el Sr. Medina se decidió por un terreno de forma compuesta. Analiza la figura, su área es igual a 78 u^2. Con base en las medidas indicadas, responde las preguntas.



- ¿Cuál es la ecuación que representa el área total, igualando a 78? $2x^2 + 4x + 8 = 78$
- ¿Es posible simplificar esta ecuación? Expliquen su respuesta. $x^2 + 2x - 35 = 0$

  Se iguala a cero, se reducen los términos independientes y se simplifica sacando mitad.
- Escriban la factorización. $(x - 5)(x + 7)$
- ¿Cuáles son los valores de x que hacen verdadera esta ecuación? $x_1 = 5$ $x_2 = -7$

2. Comparen sus resultados y, con la ayuda del profesor, elaboren un ejercicio similar en su cuaderno y, con algunos de sus compañeros, analicen los planteamientos, métodos de solución, así como las diferencias y similitudes que observaron.

Desarrolla tus habilidades

A partir de las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado es posible reconstruir una expresión cuadrática. Recuerda que las raíces provienen de obtener dos binomios y éstos a su vez provienen de la factorización de una ecuación cuadrática.

1. Encuentra la factorización (binomios con término común) y posteriormente la ecuación de segundo grado original en su forma general, es decir, $ax^2 + bx + c = 0$ para las siguientes raíces o soluciones.

   a) $x_1 = 5 x_2 = 7$ b) $x_1 = 3 x_2 = 1$ c) $x_1 = \frac{1}{3} x_2 = -3$
2. Explica el procedimiento que llevaste a cabo y comprueba tus resultados. Con la ayuda del profesor determina cuál es la utilidad de saber reconstruir una ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones y en qué te puede servir esto en la vida cotidiana.

USA LAS TIC

En la página http://www.skoool.es/content/ks4/maths/solv_quad_equations/launch.html (Consultada el día 17 de octubre de 2012, a las 02:34 horas), encontrarás explicaciones, ejemplos y ejercicios relacionados con este tema, lo que te permitirá comprender mejor de qué manera se utilizan este tipo de ecuaciones en tu vida cotidiana. Compara tus procedimientos con los que ahí proponen, elabora un comentario y compártelo con tu profesor, quien podrá hacerte alguna sugerencia para que aproveches más este recurso tecnológico.

Qué observar

Que la expresión algebraica para esta situación esté acorde con la figura que se plantea.

Observe cómo los alumnos simplifican la expresión obtenida; si es necesario, pídales que la justifiquen.

Observe que la comprobación de la factorización de la expresión cuadrática es correcta, así como cada uno de los valores de x.

Cómo enriquecer la actividad

Valore si esta actividad se realiza en forma individual, en parejas o en equipo, para que confronten sus ideas.

Si es necesario, pida a uno de los alumnos que explique cómo obtuvieron sus resultados y estén abiertos a las preguntas que pueda hacer el resto del grupo. Si es necesario, intervenga para enriquecer el conocimiento aprendido.

Bitácora pedagógica

Transversalidad

Ciencias 2, Física

Proponga problemas relacionados con otras asignaturas, como puede ser la caída libre de los cuerpos, la cual presenta fórmulas o expresiones como $d = vf - \frac{1}{2}at^2$.

Qué observar

"Toda figura puede cambiar de posición sin alterar su forma ni sus dimensiones". El conocimiento de este postulado es fundamental, cuando se trabaja con transformaciones geométricas.

Vigile que los alumnos hagan uso correcto de los instrumentos de geometría al realizar los movimientos de las figuras planteadas en todas las actividades de esta lección.

Cómo enriquecer la actividad

Con su juego de geometría, pida a un alumno que trace cómo se realiza la rotación y traslación en esta actividad.

Puede pedir a los alumnos que lleven espejos; con mucho cuidado observe figuras diferentes cuando se reflejan en los espejos.

Recursos y materiales

Pida a los alumnos un geoplano, este les permitirá trabajar el tema de una manera divertida y amena, y también pondrán en práctica lo que han visto en este tema.

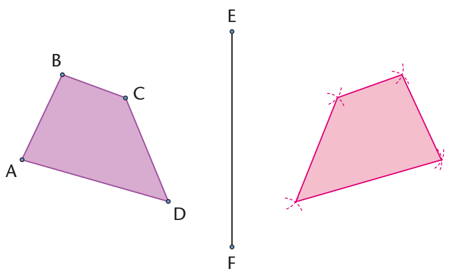
Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 2	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

ACUÉRDATE DE...

1. Dos niños se encontraban jugando a los espejos uno frente a otro. El juego consistía en que uno de ellos repitiera todo lo que el otro hacía como si fuera su reflejo, uno de ellos levantó su mano izquierda y el otro niño al mismo tiempo levantó la mano derecha, ¿por qué pasa esto?

   Tú aprendiste a trazar figuras simétricas con respecto a un eje de simetría, que es como un espejo para las figuras. Para recordarlo, traza la figura simétrica con respecto al eje EF del siguiente cuadrilátero, utiliza tu juego de geometría.



- ¿Qué características debe tener una figura para que sea simétrica a otra? Debe ser congruente
  Sus vértices deben ser equidistantes a un eje de simetría.
- ¿Cuál es la forma en que deben realizarse los trazos necesarios para encontrar los puntos simétricos de una figura con respecto a un eje? Se trazan líneas perpendiculares al eje de simetría, luego con el compás se trazan arcos de circunferencia que corten las líneas auxiliares, son estas intersecciones las que nos indican los nuevos vértices.

2. Compara la figura que obtuviste con la de algunos de tus compañeros y comenten, en grupo, cuál es la manera más adecuada de resolver esta actividad y cuál la de utilizar el juego de geometría.

PRACTÍCALO

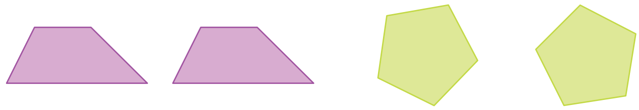
Actividad 2.1

1. Durante la sesión de matemáticas, el profesor de María Camila organizó cuatro equipos de trabajo, algunos de ellos tenían que mover una figura en un plano y otros tenían que girarla; en la siguiente imagen se muestran las parejas de figuras de cada equipo. Escriban en la línea inferior si se trata de una rotación, de una traslación o de una figura simétrica de la figura original.

Bitácora pedagógica

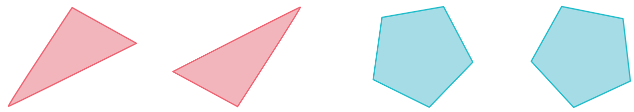
BLOQUE 2

Trapecio escaleno Imagen Pentágono Imagen



Traslación Rotación

Triángulo escaleno Imagen Pentágono Imagen



Rotación Figura simétrica

a) Con base en sus conocimientos, respondan:

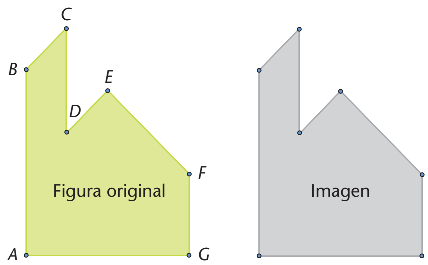
- ¿Qué es la traslación de una figura? Moverla sin sufrir alteraciones.
- ¿Con respecto a qué factor puede ser rotada una figura? A un eje
- ¿Qué diferencia hay entre los dos movimientos anteriores con respecto a la simetría de una figura?
  Una figura simétrica es como si se hubiera volteado la figura original, en estas figuras no pasa eso.

2. Contrasten sus respuestas y, con la ayuda del profesor, elaboren una explicación breve que destaque cuáles son las principales características que consideren que tiene una figura simétrica. Elaboren una hipótesis sobre cómo se realizan geométricamente los movimientos de traslación y rotación.

PRACTÍCALO

Actividad 2.2

1. Tomen como base la figura original, coloquen los vértices correspondientes y tracen líneas rectas que unan ambas figuras.



a) Contesten las preguntas.

- ¿De qué manera identificaron los vértices de la imagen? Observando la ubicación de los vértices de la figura original.
- ¿Qué relación tienen las líneas que trazaron entre ambas figuras? Son paralelas

  Argumenten su respuesta. Si tiene la misma orientación, las líneas siempre van a ser paralelas.

Qué observar

El alumno ya estudió la simetría, pero la intención es establecer las propiedades que debe cumplir cada uno de los movimientos, como condiciones de paralelismo y perpendicularidad en la simetría axial; condiciones de paralelismo y perpendicularidad en la traslación; condiciones de los arcos en la rotación y en consecuencia en la simetría central; relaciones de equivalencia entre dos movimientos consecutivos diferentes, etcétera.

Cómo enriquecer la actividad

Además de resolver estas actividades, pida al grupo que en una puesta en común argumenten cada una de sus respuestas.

Curiosidades, acertijos y más

El movimiento de traslación de la Tierra la realiza alrededor el Sol, describiendo una elipse, este movimiento tarda ¡365 días, 5 horas y 47 minutos!

Bitácora pedagógica

Cómo enriquecer la actividad

Elabore otras preguntas, con la finalidad de enriquecer la actividad, por ejemplo: ¿por qué es indispensable que la distancia a la que se trasladan sus vértices sea la misma? ¿Por qué no cambia el valor de los ángulos en la figura?

Dé tiempo para que los alumnos las analicen y las contesten. Permita el intercambio de ideas y puntos de vista.

Qué observar

Observe cómo utilizan los instrumentos geométricos para realizar esta actividad.

Ponga énfasis en la manera que trazan cada uno de los vértices de la figura compuesta, así como las justificaciones para cada uno de los trazos.

Reflexión

Perseverar significa ser constante y firme en todo lo que se quiere y en los buenos hábitos. Para lograr las metas, o cambios positivos que una persona se propone, es necesario ser perseverante. Las Matemáticas son una ciencia que requiere disciplina, pero sobre todo perseverancia.

Matemáticas 3. Por competencias

- Si miden la distancia entre cada vértice de la figura original con el que le corresponde en la imagen obtenida, ¿qué relación hay entre la distancia de cada pareja de puntos? Es la misma para todos los puntos.

  Expliquen por qué ocurre esto. Para que la figura obtenida tenga la misma forma que la original, es indispensable que la distancia a la que se trasladan sus vértices sea la misma.

- ¿De qué manera es posible demostrar que la imagen es igual, en todas sus características, a la figura original? Midiendo los lados y ángulos de ambas figuras.

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, con el apoyo de su profesor, elaboren una explicación breve que indique las condiciones que se deben cumplir para poder trasladar una figura por métodos geométricos.

Para leer más

Cuando se realiza la traslación de una figura en cualquier sentido, se forman líneas paralelas entre los vértices que son correspondientes y siempre son de la misma longitud.

En una traslación no cambia la posición de la figura, es decir, sólo se cambia de lugar, no se rota ni se obtiene una figura simétrica.

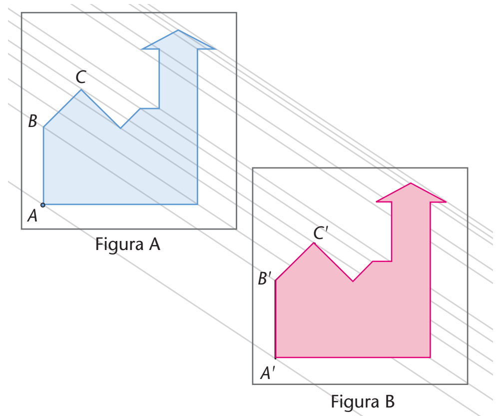
PRACTÍCALO

Actividad 2.3

Una vez identificado el concepto de traslación, el profesor de matemáticas de María Camila organizó en parejas al grupo y formuló las siguientes preguntas diciendo: "No quiero que las respondan ahora, quiero que reflexionen sobre ellas y escriban en su cuaderno la respuesta que consideren más adecuada".

1. Cuando una figura está compuesta por otras figuras y ésta se traslada de lugar, algunos de sus lados o vértices pueden quedar dentro de la figura compuesta, entonces, ¿es necesario trasladar todos sus lados?

   a) Trasladen la figura A al recuadro de la figura B, utilizando su juego de geometría y tomando como base el punto *A'*.



Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

- Describan el procedimiento que emplearon, indiquen cómo encontraron los vértices, así como los segmentos correspondientes a cada lado de la figura. Con una regla se miden las distancias a los puntos dados y se encuentran los que faltan utilizando las mismas distancias sobre las demás líneas paralelas, ubicando en cada una los vértices correspondientes, para después unirlos.
- ¿Qué relación observan en cuanto a los ángulos internos al comparar ambas figuras? Miden lo mismo

  ¿Por qué ocurre esto? Porque la figura obtenida no cambió de forma con respecto a la original.
- ¿Ocurre una relación similar en cuanto a los lados de la figura? Sí

  ¿Por qué? Porque la distancia se conserva desde el momento en que se ubican los vértices.
- ¿Al comparar dos de los lados homólogos de ambas figuras, estos forman entre sí líneas perpendiculares, paralelas u oblicuas? Paralelas
- ¿Esto es igual para cualquier otra figura que se traslade? Sí

  ¿Por qué ocurre esto? Porque mientras no se rote la figura y tenga su misma orientación la traslación generará líneas paralelas para sus vértices.

2. Comenten grupalmente si es posible identificar con claridad las características que se conservan respecto a la figura original.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que propongan figuras compuestas de su entorno y que apliquen lo que han aprendido hasta este momento. Aclare las dudas que surjan sobre la traslación de cualquier figura en general.

Para tener en cuenta

Cuando una figura se traslada, se puede observar que las medidas de sus ángulos internos y externos se conservan, así como la medida y posición de todos sus lados. Analiza el esquema de ejemplo.

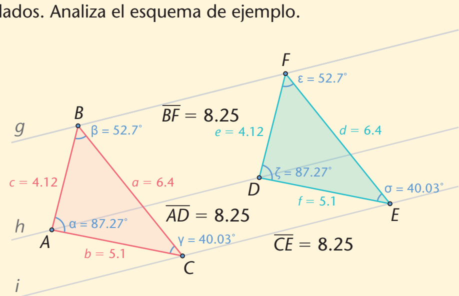


Figura original Imagen trasladada

Observa que los vértices se indican con letras mayúsculas; los segmentos que forman los lados, con letras minúsculas; y los ángulos, con letras griegas, aunque estos últimos también se pueden representar haciendo referencia a sus vértices, por ejemplo, el ángulo que se encuentra en el vértice *A* se puede denotar como $\angle A$ (con base en el vértice), o bien, como $\angle CAB$ (con base en los segmentos que lo forman, poniendo en medio la letra A, que es el extremo común de ambos segmentos y, anotando éstos en el sentido de las manecillas del reloj, por este motivo no se denota como $\angle BAC$).

Qué observar

Dé tiempo para que los alumnos revisen este apartado, ya que podrán aclarar sus dudas y tener en cuenta otros parámetros que se pueden incluir en la traslación de figuras.

Al terminar, pida que lo interpreten con sus propias palabras, para que sea más firme el conocimiento.

Transversalidad

Geografía de México y del mundo

Observe que los alumnos implican este tema de rotación y traslación en los movimientos de los planetas del Sistema Solar, y encuentren las diferencias entre cada uno de ellos en su rotación y traslación.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta actividad está diseñada para que los alumnos trabajen en equipo.

Observe que ponen en práctica las condiciones para la rotación de figuras y que hacen uso correcto del compás y de los demás instrumentos de geometría. Además de que los ángulos de la figura original es la misma en cada una de las rotaciones.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que realicen, en su cuaderno de notas, una tercera y cuarta rotación de cada figura que se propone en esta actividad. Que nombren cada uno de los vértices conforme hacen la rotación de las figuras, así como justificar el porqué de renombrarlas.

Recursos y materiales

La página *Geometría Activa* le será de utilidad para enriquecer su clase, ya que encontrará un simulador con el que sus alumnos podrán, en el centro de cómputo, manipular figuras y hacer traslaciones y rotaciones.

http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/2eso.htm

http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/movi30.htm

PRACTÍCALO — Actividad 2.4

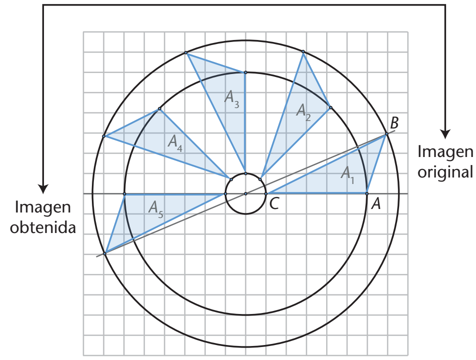
1. El papá de Diana trabaja en una editorial, actualmente está haciendo una enciclopedia temática. En la sección de retos matemáticos, uno de ellos trata sobre la rotación de figuras.

   a) Analicen el siguiente esquema, y contesten las preguntas para ello utilicen el transportador.

   Tomando como base los vértices indicados con la letra A, ¿cuál es la amplitud del ángulo A_1 A_2? 45°

   Ahora, al comparar la figura A_1 con A_3 ¿cuántos grados requirió esta rotación? 90°

   - ¿Cuál es el ángulo de rotación con el que se giró la imagen original para llegar a la figura final obtenida? 180°
   - ¿Cuántos grados se debe girar la figura original para que quede nuevamente en su posición de inicio? 360°

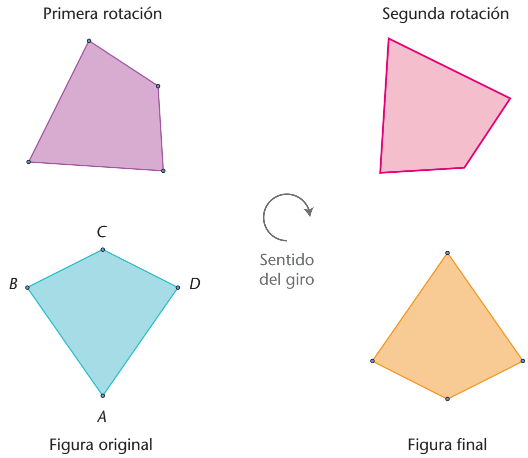


2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, con la ayuda del profesor, realicen este ejercicio para algunos otros ángulos. Comprueben si la diferencia entre ellos es la misma que entre los vértices dados y analicen sus resultados.

PRACTÍCALO — Actividad 2.5

1. En la sección anterior, analizaron la rotación de una figura a 180°, pasando por algunas de sus posiciones intermedias; pero para el papá de Diana el reto más grande es rotar una figura en un ángulo distinto al de una semicircunferencia.

   a) El siguiente trapezoide simétrico de la figura original mostrado en la siguiente figura, se giró en tres posiciones con ángulos iguales entre cada figura, tracen la figura correspondiente a la segunda rotación y contesten las preguntas. Tengan presente el sentido del giro indicado en el **centro de rotación**.



Glosario

Centro de rotación. Es el punto medio de un trazo, que une un punto con otro simétrico.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

- ¿De qué manera determinaron el ángulo de rotación para poder trazar la segunda figura?
  Midiendo los ángulos en el sentido de las manecillas del reloj.
- ¿Cuántos grados tiene la primera rotación? 55° aproximadamente
- ¿Cuántos grados giró la imagen final con respecto a la original? 180°
- Al analizar los lados y los ángulos de la figura original, ¿qué relación tienen con los lados y los ángulos de la figura final? Son los mismos a pesar de haber girado la figura original.
  ¿Por qué ocurre esto? Son los mismos a pesar de haber girado la figura original.
- ¿Consideran que ocurrirá lo mismo con cualquier otra figura que sufra una rotación? Sí
  Expliquen su respuesta. Al rotar una figura su forma no cambia.
- ¿Ocurre lo mismo en la primera y segunda rotación? Sí Entonces, ¿qué conclusión pueden obtener al respecto? Una rotación solo cambia la posición de la figura, no altera la longitud de sus lados o las medidas de sus ángulos.

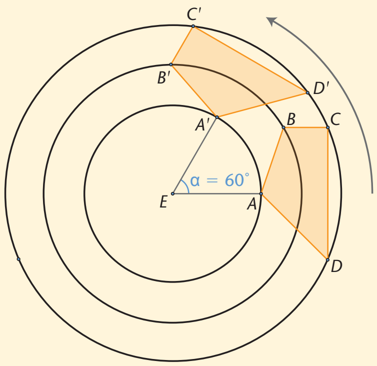
2. Contrasten sus resultados con los de algún equipo cercano y, con la ayuda del profesor, describan cuál es la mejor estrategia para llevar a cabo esta actividad.

Para tener en cuenta

Una rotación se puede hacer en dos sentidos:

1. Negativa, en el sentido en que avanzan las manecillas del reloj.
2. Positiva, en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj.

Ejemplo de rotación positiva



Para leer más

Una figura, al rotarse, conserva vértices y lados correspondientes a la figura original y cada uno de ellos **equidista** del centro de rotación.

Glosario

Equidistar. Significa que dos o más puntos u objetos están a la misma distancia de uno o varios objetos que se toman como referencia.

Cómo enriquecer la actividad

Al término de la actividad, pida a uno de los equipos que explique cómo llevaron a cabo esta actividad, facilíteles los instrumentos de geometría para que realicen esta rotación.

Qué observar

Dé tiempo para que analicen la información, con el fin de considerar cómo se debe realizar la rotación, ya sea en sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario.

De ser necesario, explique por qué se considera negativa si se realiza la rotación en sentido de las manecillas del reloj o positiva cuando es en el sentido inverso.

Curiosidades, acertijos y más

¿Por qué el 21 de junio fue el día más largo del año en el hemisferio norte? Pida a los alumnos que investiguen cuál fue el motivo de este fenómeno.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Recorra el salón de clases y observe que el alumno realiza de forma adecuada la rotación de esta figura compuesta, cerciórese de que renombra de manera correcta cada uno de los vértices de la figura obtenida.

Cómo enriquecer la actividad

Pida al grupo que comparen sus trazos para comprobar que están bien realizados. Si surgen dudas, permita que entre ellos mismos se apoyen para aclararlas.

Reflexión

Sobre la identificación

Es bueno identificarse con aquellas personas con quienes puedes expresarte libremente, intercambiar ideas y conocimientos, compartir emociones e ideales que te ayuden a ser mejor persona. Al analizar un problema matemático en equipo, estas condiciones son fundamentales para la buena colaboración.

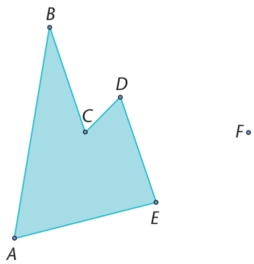
Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 2.6

Ahora que has rotado una figura, puedes conocer el significado geométrico que tiene la rotación desde un punto de vista simétrico.

1. Utiliza tu juego de geometría para realizar, en tu cuaderno, una rotación de 180° de la figura que se muestra a continuación.
   a) Explica, ¿qué estrategia utilizaste para trazar la figura solicitada? Se puede calcar superponiendo una hoja o tomar sus medidas, para luego trazar las líneas sobre el punto F y encontrar los nuevos vértices con el compás o con una regla.
   b) ¿De qué manera es posible demostrar que la figura que obtuviste es imagen de la original? Tomando la medida de sus lados y ángulos para compararla con la original.

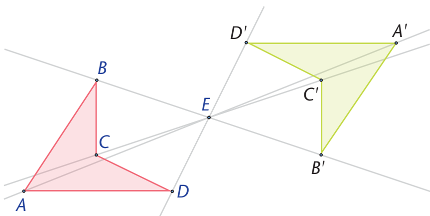


2. Compara tus resultados y determina cuál es la forma más adecuada para trazar una figura simétrica a un punto o centro.

PRACTÍCALO

Actividad 2.7

1. La mayoría de los polígonos con los que han trabajado son convexos. ¿Se percataron del tipo de polígono con el que trabajaron en la sección anterior?, ¿qué tipo de polígono es?, ¿esto afecta en algo la rotación de una figura? Para encontrar las respuestas, analicen el siguiente esquema y contesten las preguntas.



   a) Comparen la distancia que hay entre cada vértice de la figura original al centro de rotación, pueden auxiliarse de una regla o un compás, y compárenla con su correspondiente en la figura final, ¿qué observaron? Que no se altera la forma de la figura original.
   b) Utilicen un transportador y encuentren la relación de la amplitud de los ángulos correspondientes entre ambas figuras, ¿qué observaron? Miden lo mismo
   c) En su cuaderno, elaboren una tabla comparativa en la que se retomen las medidas angulares de ambas figuras y otra donde se ubiquen las medidas de los lados de la figura original, comparándolos con la figura obtenida.
      - Que la figura sea un polígono cóncavo, ¿afecta en algo su rotación? No
        ¿Por qué ocurre esto? Porque no se están alterando sus dimensiones.
      - ¿Qué características pueden concluir que presenta una figura que fue girada o rotada 180°? Es como si se hubiera obtenido la figura simétrica a otra pero por dos ejes perpendiculares.
      - ¿Cuál es el procedimiento más adecuado para verificar que las dos figuras son congruentes? Usando los criterios de congruencia.
      - ¿Qué instrumentos del juego de geometría son los más indicados para realizar una rotación? Regla y compás
2. Comparen sus respuestas con las de algunas parejas cercanas y, con la ayuda del profesor, analicen cómo es que se mantienen todas las características de la figura original en la figura reflejada y busquen algunos ejemplos de su aplicación práctica en la vida cotidiana, regístrenlos, ilústrenlos y compártanlos con sus compañeros de clase.

Bitácora pedagógica

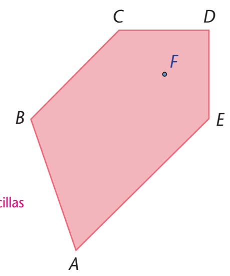
BLOQUE 2

PRACTÍCALO

Actividad 2.8

1. José Luis hace muñecos articulados de cartón. Para poder articular los brazos y piernas de sus creaciones, necesitó saber cómo se puede mover una figura si se coloca un eje de rotación dentro de ella. Ustedes hasta ahora han trabajado la rotación de figuras con el centro de rotación fuera de la figura misma, sin embargo, también es posible que se encuentre dentro de ella, como lo hace José Luis.

   a) Observen la figura mostrada y la ubicación del centro de rotación, diseñen una estrategia para realizar una rotación de 180°.



   - Expliquen, ¿cuál fue la estrategia que emplearon? Se trazan líneas de cada vértice al centro de rotación y se toman las medidas para poder encontrar los nuevos vértices.
   - ¿Cómo quedó la figura ya rotada con respecto a la original? En sentido inverso a la original.
   - ¿Los ángulos que midieron fueron en el sentido en que avanzan las manecillas del reloj o en sentido contrario? Se espera que sea en sentido inverso a las manecillas del reloj, pero también es válido al contrario.
   - Expliquen por qué decidieron hacerlo de esa forma. Se espera que el alumno argumente el porqué de la conveniencia su procedimiento.

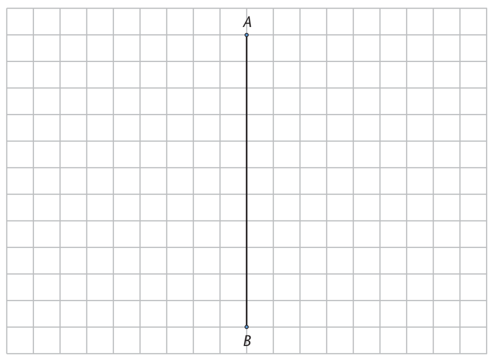
   b) Tracen en su cuaderno algunos triángulos o cuadriláteros y coloquen dentro de su superficie un punto de rotación, propongan nuevas estrategias parar resolver estas situaciones.

2. Comparen sus resultados con los de algún equipo cercano y, con la ayuda del profesor, expliquen qué circunstancias son distintas para las figuras que se rotan con base en un punto interior a las que se basan en uno exterior.

LO QUE APRENDÍ

1. Los diseñadores, decoradores y fabricantes de mosaicos y losetas utilizan de manera cotidiana la traslación y la rotación para adornar sus construcciones o productos, al igual que ellos, puedes crear tu propio diseño y trasladarlo.

   a) En el lado izquierdo del plano ubica, según tu preferencia, al menos 5 puntos no alineados con los que puedas formar un polígono, luego obtén su simétrico con respecto al segmento *AB*, señala los vértices y comprueba que la medida de los ángulos y de los segmentos se conserva.



   - ¿Qué estrategia utilizaste para colocar los puntos? Depende del la creatividad del alumno.
   - ¿Qué preferiste, ubicar los puntos para formar una figura regular o una figura irregular? Depende del la creatividad del alumno. Explica porqué. Depende de la figura que realizó.
   - Al comparar las dos figuras, ¿puedes comprobar que las medidas de sus lados y los ángulos son iguales? Sí Justifica tu respuesta. Se toman las medidas de ambas figuras y se comparan entre sí.

Qué observar

Dé tiempo para que los alumnos realicen esta actividad en equipos, observe que en su cuaderno realicen de manera adecuada la rotación de la figura sobre un punto de rotación, así como la justificación de la estrategia que utilizaron para la misma.

Cómo enriquecer la actividad

Pida al grupo que en su cuaderno de notas tracen otras figuras de polígonos regulares o irregulares, a fin de recubrir en forma de mosaico un espacio, que lo coloreen y que lo compartan con otros compañeros del grupo.

De ser necesario, que repasen lo que trabajaron en la lección 3 del bloque III de Matemáticas 2, relacionado con las características de los polígonos para recubrir un plano.

Transversalidad

Historia 1 y 2

Pida a los alumnos que investiguen en qué épocas de la historia se realizaron mosaicos por medio de la rotación, la traslación y la simetría de las figuras. Que obtengan una imagen de estos mosaicos y que la analicen en equipos.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Que analicen la figura y verifiquen que al realizar la traslación utilizan de manera adecuada las condiciones establecidas desde un principio para efectuar de manera apropiada la traslación.

Observe que la figura que trasladaron es congruente con la figura original; que manejen de manera adecuada el renombre de cada uno de los vértices de la nueva figura.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que propongan nuevas figuras y que elijan una para hacer la rotación y la trasladación en su cuaderno. Al final de esta actividad, solicite a los alumnos que escriban una conclusión acerca de lo que aprendieron, y las dudas que tuvieron sobre esta lección. Si es necesario, realice un repaso de lo más importante. Déjeles más ejercicios o pídales que visiten la página electrónica que recomienda el libro para aclarar sus dudas.

2. Traslada la figura A al interior del recuadro A'.

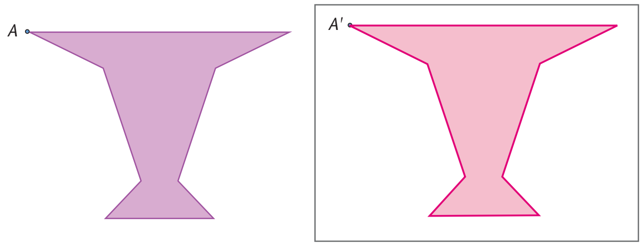


Figura original | Imagen

- Describe la estrategia que utilizaste. Se traza la línea de A a A', se toma la medida. Se trazan líneas paralelas en cada vértice y luego se ubica la imagen correspondiente a cada uno.
- ¿Cómo puedes comprobar que la figura es congruente con la original? Se traza la línea de A a A', se toma la medida. Se trazan líneas paralelas en cada vértice y luego se ubica la imagen correspondiente a cada uno.

3. Compara tus respuestas con las de algunos de tus compañeros y elabora una hipótesis que explique clara y brevemente las características de dos figuras que son reflejadas o rotadas por un punto.

USA LAS TIC

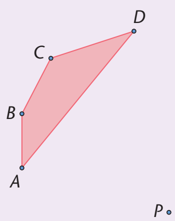
Visita la página http://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1285581005/contido/ma023_oa01_es/index.html (Consultada el día el 01 de Marzo del 2013, a las 15:03 horas.)

En ella encontrarás un programa interactivo que te ayudará a practicar y comprender mejor la simetría y la rotación de una figura, compara los resultados que obtengas con lo que aprendiste en este tema y escribe un comentario al respecto

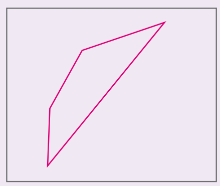
Desarrolla tus habilidades

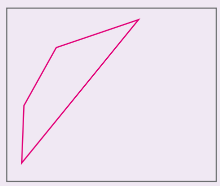
Una manera de poner a prueba tus conocimientos es realizando dos movimientos para una sola figura.

1. Traslada y rota la figura en el recuadro correspondiente, ¿se obtendrá el mismo resultado si se rota primero y luego se traslada?



Traslación





Rotación

- Explica de qué manera determinaste el punto de partida para trazar las figuras de modo que quedaran dentro de su respectivo cuadro. Es más sencillo es el vértice A, con él se pueden encontrar los demás.

- ¿Cuál es la estrategia que usaste para resolver la actividad? Se toma el punto P como base para trazar las líneas y encontrar los puntos.

2. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y, con la ayuda del profesor, verifica que realizaste tus trazos correctamente.

Bitácora pedagógica

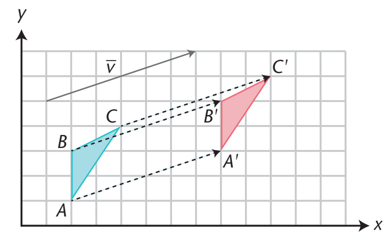
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 3	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

ACUÉRDATE DE...

1. Formen parejas, analicen las preguntas y lleven a cabo las actividades que se indican para cada inciso.

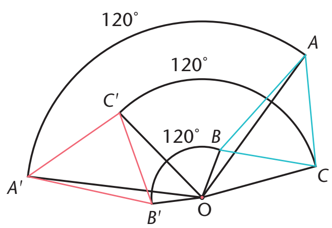
   a) En la ilustración se muestran 3 figuras con sus respectivas imágenes después de haberles aplicado un movimiento. Escriban sobre cada línea el nombre de la acción que se realizó.

Figura 1



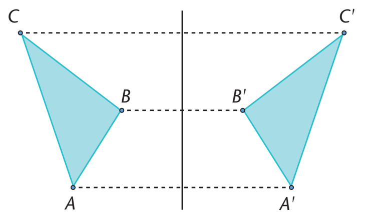
Traslación

Figura 2



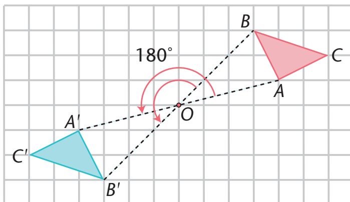
Rotación

Figura 3



Simetría central

Figura 4



Simetría central

   b) En su cuaderno construyan un cuadrilátero, tómenlo como base para realizar una traslación. Obtengan una figura por simetría central, otra por simetría axial y otra por una rotación menor a 180°.

Qué observar

Pida a los alumnos que lean el contenido 3, ya que en el anterior trabajaron con la rotación y la traslación de figuras. Aproveche la actividad **Acuérdate de…** para que analicen y respodan correctamente lo que se les indica.

Cómo enriquecer la actividad

Dé tiempo para que realicen esta actividad. Supervise que utilizan de manea correcta el equipo de geometría para realizar los trazos de la traslación y rotación de cada una de las figuras que se les indica.

Bitácora pedagógica

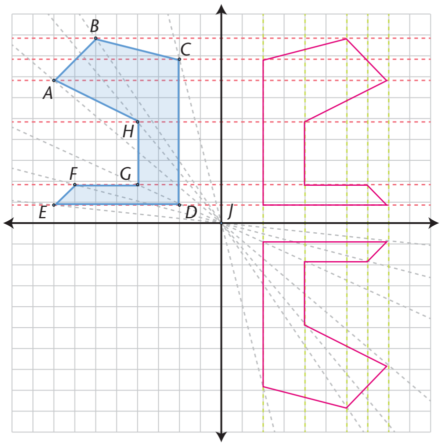
Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO **Actividad 3.1**

1. Tracen la figura simétrica con respecto al eje vertical en el recuadro del lado izquierdo, luego tracen la figura simétrica con respecto al eje horizontal, es decir, en el cuadro inferior derecho también pueden hacer una rotación con respecto a la figura original.

   a) Analicen las figuras obtenidas y respondan las preguntas.

   - ¿Qué estrategia utilizaron para determinar los puntos correspondientes a cada vértice de la figura original? Depende del alumno
   - ¿Qué relación tiene la última figura con la original? Es una rotación de 180°.
   - ¿Qué característica tienen los puntos de la figura original con la que se obtiene al pasar todos los puntos por el punto *J*? Se trata de una simetría central.
   - Analizando las líneas punteadas, respondan, ¿qué relación tiene la reflexión de esta figura en los dos ejes con respecto a la simetría central, es decir, a una rotación? Que producen la misma figura cuando se realiza sobre ejes perpendiculares.



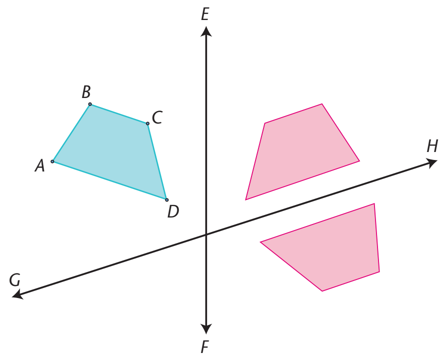
2. Comparen sus trazos y respuestas con los de algunas parejas cercanas y, con la ayuda del profesor, elaboren una explicación clara y breve de la relación que tiene una rotación por un punto y reflejar el objeto sobre dos ejes perpendiculares.

PRACTÍCALO **Actividad 3.2**

1. ¿Cuál será la posición final de una figura de la que se trazan sus simétricos, tomando como referencia dos ejes oblicuos?

   a) Tracen el simétrico del cuadrilátero *ABCD* usando el eje *EF*, y el cuadrilátero *A'B'C'D'* sobre el eje *GH*.

   - ¿Cuál es el efecto producido en la figura *ABCD* después de la segunda simetría? Es también una rotación sobre dos ejes pero que no llega a los 180°.
   - ¿Se vieron alteradas las dimensiones de la figura original en alguna de las imágenes obtenidas?
   - ¿Por qué ocurrió esto? Porque al mover un eje no se altera la forma, sino la posición y el ángulo de giro de la figura original.



94

Qué observar

Observe que han deducido la manera correcta de reproducir la imagen opuesta al eje de simetría. Si el espacio propuesto es muy pequeño, pídales que la construyan en su cuaderno.

Además, cerciórese de que nombran de manera correcta cada uno de los vértices de las figuras.

Cómo enriquecer la actividad

Pídales a los alumnos que expliquen la posición que tiene la figura, conforme se esta formando en cada uno de los ejes en que se pide que se trace.

Si es necesario, pídales que trasladen la segunda figura trazada al cuadrante que se forma entre G y F, que la comparen con la figura azul.

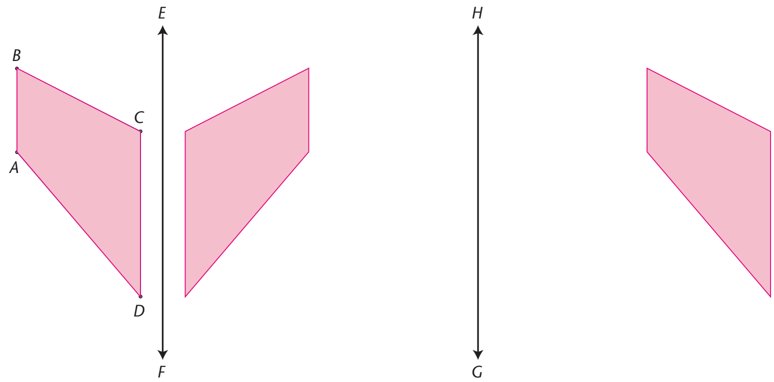
Curiosidades, acertijos y más

Comente a los alumnos que "La evolución genética de los seres humanos ha permitido que el cuerpo sea simétrico, lo que ha sido llamado proporciones divinas, que se observa en animales inferiores y en los escritos del gran Leonardo da Vinci".

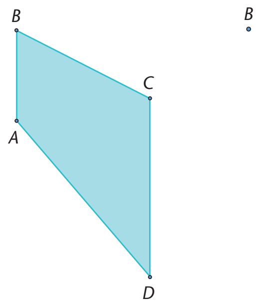
Bitácora pedagógica

- Contrasten sus respuestas con las de algunos compañeros y, con la ayuda del profesor, expliquen: ¿cuál es la relación de la reflexión de una figura sobre dos ejes oblicuos en cuanto al ángulo de rotación que se genera? Den algunos ejemplos en los que se demuestre la aplicación de estas propiedades en la vida cotidiana.

2. ¿Cuál es la relación que se puede encontrar entre la simetría axial y la traslación? Para investigar esto, tomen el cuadrilátero mostrado, obtengan el simétrico de la figura sobre el eje *EF* y posteriormente obtengan el simétrico del cuadrilátero que trazaron sobre el eje *HG*.



a) En su cuaderno, trasladen esta misma figura, coloquen como referencia el punto *B'* dado en la figura muestra.



- ¿Qué relación encontraron entre la simetría axial del primer recuadro y la traslación realizada en el segundo recuadro? La separación al eje de simetría es mayor en la segunda figura.

  ¿Por qué ocurre esto? Porque entre más alejado esté el eje de la figura más lejana quedará su imagen.

- ¿Consideran que ésta es la única forma de solucionar esta situación o existen otras posibilidades? Sí

  ¿Porqué? Porque también se pueden utilizar reglas y escuadras en vez del compás.

- ¿Qué instrumentos del juego de geometría se pueden utilizar para resolver esta actividad? Regla y compás
- ¿Consideran que es posible utilizar otros instrumentos para llegar al mismo resultado? Sí

  Justifiquen su respuesta. Se pueden utilizar inclusive medios físicos o electrónicos.

- ¿Son los mismos instrumentos del juego de geometría los que se utilizan para todos los métodos? Sí Justifiquen su respuesta. Cada persona utiliza los más adecuados, sin embargo, siempre son instrumentos del mismo equipo de geometría.

b) Al analizar los cambios que realizaron en la figura, ¿qué pueden decir que ocurrió con su forma y posición en relación con su perímetro y su superficie? Permanecieron iguales

2. Comparen sus trazos en grupo, concluyan y expliquen, ¿cuál es la relación entre la reflexión de una figura sobre dos ejes paralelos y la traslación de una figura? Diseñen un problema similar en su cuaderno y comenten, frente al grupo, algunas de las estrategias y procedimientos que usaron con otros equipos.

Qué observar

Que los alumnos trasladen de manera correcta la figura sobre el eje EF y el eje HG; si el espacio es insuficiente, pídales que lo realicen en su cuaderno.

Recorra el salón de clases para verificar que en equipos se están apoyando para realizar los trazos correspondientes, así como el manejo de los instrumentos de geometría.

Cómo enriquecer la actividad

Seleccione a uno de los equipos para que exponga ante el grupo cómo llegaron al resultado y la forma como utilizaron los instrumentos de geometría.

Permita el debate con respeto, que los alumnos expositores respondan las preguntas que surjan; si es necesario, intervenga para solucionarlas.

Reflexión

Concientice a los participantes acerca de la responsabilidad que adquieren al estar frente a un grupo. También sensibilícelos hacia la aceptación de comentarios, preguntas o dudas de sus compañeros y la disposición que deben tener para responder en la medida de sus conocimientos.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta actividad está diseñada para que se trabaje de forma individual, cerciórese de que los trazos están correctos, de que entendió la simetría axial para el traslado de la figura, así como la utilización de A´´, B´´, C´´, D´´, E´´, F´´, G´´; A´´´, B´´´, C´´´, D´´´, E´´´, F´´´ y G´´´, en cada uno de los vértices de las figuras trasladadas.

Cómo enriquecer la actividad

Ahora se maneja un sólido regular, pida a sus alumnos que en su cuaderno realicen la traslación de uno o dos sólidos regulares diferentes y los comparen con el que se propone en esta actividad; por ello, sugiérales que la efectúen como parte de la tarea que se hará en casa.

Recursos y materiales

En la página de la *Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales* encontrará simuladores con los que enriquecerá su clase. Utilice el centro de cómputo de su escuela, donde sus alumnos podrán manipular y hacer rotaciones.

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_207_g_1_t_3.html?open=activities

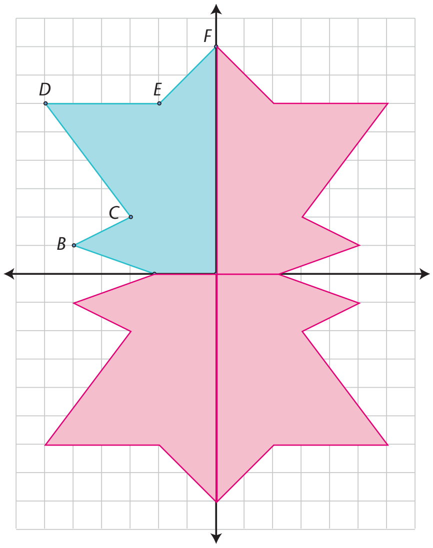
Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 3.3

Es muy común encontrar diseños decorativos simétricos, éstos toman como fundamento los mismos ejes de simetría que conoces.

1. Con base en la figura dada, concluye el diseño trazando en los otros tres cuadrantes que completan el diseño.
   - Describe la estrategia que utilizaron para completar el diseño. Las respuestas son variadas.
   - Cómo base para la simetría, ¿empleaste una traslación o una rotación? Ninguna de las dos
   - ¿Por qué ocurrió esto? Porque se usó la simetría axial.
   - ¿Los ángulos de esta figura son cóncavos y convexos? _____ Describe qué ocurrió con las medidas angulares en los 3 cuadrantes que trazaste? Tiene de ambos

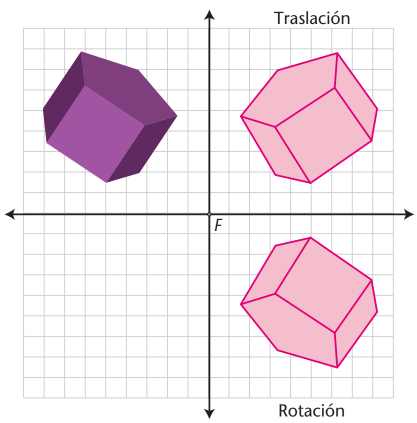


2. Compara tus trazos y estrategias con los que realizaron algunos de tus compañeros. Elabora un comentario en tu cuaderno en el que expliques cuál es la relación entre la rotación de una figura y la simetría axial. Compártelo con el grupo.

PRACTÍCALO

Actividad 3.4

Lo que has aprendido hasta ahora, la traslación, la rotación y la simetría de una figura, tiene muchas aplicaciones, por ejemplo: las personas que trabajan con diseño de imágenes, decoración, creación de escenarios, artistas, etcétera, pero esto no se limita a figuras planas, también es posible representar en dos dimensiones figuras tridimensionales.



1. Para analizar esto y contrastarlo con lo que saben, hagan la traslación y la rotación de un sólido, en este caso, un prisma pentagonal; del lado izquierdo, realiza la traslación de la figura, y en el cuadro inferior derecho, la rotación de la misma.
   a) Despúes de realizar las reproducciones indicadas, respondan:
      - ¿Consideran que las figuras obtenidas corresponden a la reflexión real de un objeto tridimensional? Permita que el alumno conteste con libertad.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

Expliquen su respuesta. Sí, porque son el reflejo.

- ¿El procedimiento que emplearon fue el mismo que se usa para una figura plana? Sí
  Justifiquen su respuesta. A pesar de que la figura representa 3 dimensiones, no deja de ser una figura plana con solo 2 dimensiones, es por eso que se trabaja igual.
- ¿Afectó en algo el hecho de que la figura muestre una línea oculta en la imagen de la traslación y la rotación? No ¿Porqué? Porque con los vértices visibles es suficiente para representarla en dos dimensiones.
- ¿Qué función tiene el punto *F*, en relación con los vértices homólogos entre las tres figuras? Es el centro de rotación.
- ¿Las medidas de los ángulos internos y la longitud de cada lado, se conservaron o cambiaron? Se conservaron ¿Por qué ocurrió esto? Porque al reflejarse o rotarse no cambian sus medidas.

2. Analicen con ayuda de su profesor los resultados y determinen, ¿qué ocurre cuando se realiza la traslación o la rotación de la imagen de un sólido de manera plana en relación con su representación real?

Para leer más

Las figuras de tres dimensiones, también se pueden trazar, trasladar o rotar de manera simétrica.

Cuando se rota una figura en un ángulo de 180° se le llama *simetría central* y se basa en que tres puntos sean **colineales**, tomando al punto central como centro de simetría para todos los puntos.

Glosario

Colineal. Que se encuentra en la misma línea.

Para tener en cuenta

En la *simetría axial*, los lados homólogos de dos figuras son paralelos entre sí y tienen la característica de que siempre conservan la misma medida, de la misma forma, los ángulos correspondientes entre ambas figuras son iguales.

Durante una traslación, todos los lados de ambas figuras son congruentes y paralelos, los puntos que forman cada vértice conservan la misma distancia y los ángulos tienen la misma medida y posición.

Durante una rotación a partir de un ángulo dado, la figura obtenida conserva las dimensiones de sus lados y las medidas de sus ángulos, no invierte su forma como en la simetría axial, y regularmente sus lados no son paralelos, aunque esto último puede depender del ángulo en que se rotó la figura.

LO QUE APRENDÍ

En el diseño de mosaicos, se utilizan mucho las propiedades y los conocimientos que han adquirido acerca de reflejar, rotar u obtener la imagen simétrica de otra.

1. Diseñen una estrategia que les permita completar cada recuadro de la tabla gráfica que se encuentra en la siguiente página, de manera que todos tengan tres imágenes.

Cómo enriquecer la actividad

Las figuras tridimensionales, o sólidos geométricos, que se pidió trabajar en casa, se pueden comparar con los polígonos regulares. Pídales a los alumnos que también, a manera de tarea, tracen y trasladen la base de los sólidos y que observen la dificultad para trasladar a cada uno de ellos. De esta forma se ejercitarán más con los instrumentos de geometría.

Qué observar

Pida a los alumnos que lean la información de este apartado. Observe que entendieron el concepto de simetría axial en este contenido, para que se den cuentan que lo han aplicado sin conocerlo.

Recorra el salón de clases y cerciórese de que lo expliquen con sus propias palabras.

Curiosidades, acertijos y más

Comente a los alumnos que los griegos sostenían que la simetría en el rostro de una persona tenía que ver con la belleza de los seres humanos. ¿Consideras que la belleza radica en la simetría de los cuerpos y de los rostros?

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta actividad está diseñada para que los alumnos trabajen en equipo.

Observe que justifiquen sus procedimientos al realizar cada trazo de las figuras que faltan en cada recuadro; si tienen dudas, pueden resolverlas con sus compañeros de clase.

Si es poco el espacio para responder, pida que lo hagan en su cuaderno de notas o en una hoja de cuadricula.

Cómo enriquecer la actividad

Proponga otras situaciones o dé la libertad a los alumnos de proponerlas, a fin de que establezcan cómo llevarán a cabo la traslación. Pídales que visiten la página electrónica que viene en el libro, para que de esta forma quede consolidado el conocimiento.

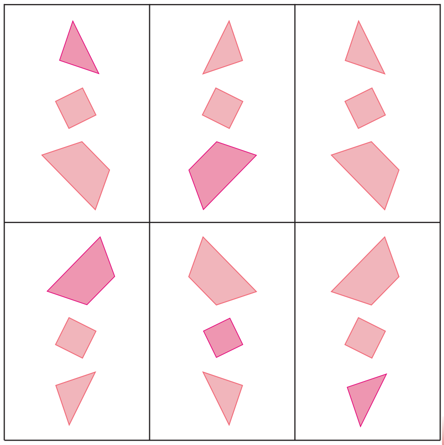
Transversalidad

Español

En conveniente realizar una buena lectura, sin embrago, la comprensión de la misma es lo más importante, ya que van acompañadas. Repase las técnicas de lectura, para que cuando lean las situaciones las comprendan y sea más fácil resolverlas.

- Expliquen, ¿cuál es la estrategia que plantearon? Cada figura se puede obtener a partir de otra usando simetría axial o central.
- ¿De qué manera resolvieron el problema referente a la gran cantidad de trazos que se realizan para no confundirse entre ellos? Trazando líneas de datos fáciles de borrar.
- ¿Es posible demostrar que las figuras se relacionan por medio de una rotación o una traslación? Sí

  Justifiquen su respuesta. En algunas aplica solo la simetría axial y en otras también la rotación.



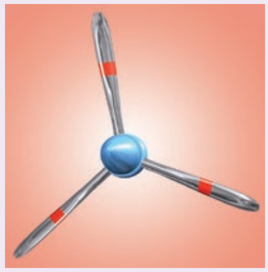
2. Comparen sus resultados y estrategias con los de otro equipo, y, con la ayuda del profesor, comenten, ¿en qué momentos de la vida cotidiana se presentan este tipo de situaciones y cuál es la utilidad práctica de saber realizar estos procedimientos?

USA LAS TIC

De la página web http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b05_t02_s03_aulademedios/maestro.html (Consultada el día 4 de marzo de 2013, a las 12:25 horas) podrás descargar un archivo en formato Word, que te ayudará a enriquecer este tema. Después de estudiarlo, realicen, coordinados por su profesor, un análisis grupal sobre este material.

Desarrolla tus habilidades

1. Observa la imagen, es una hélice de avioneta. Primero decide cómo colocar los ejes para que en tu cuaderno realices una traslación y una rotación de la figura.



   a) Explica de qué manera decidiste ubicar los ejes. Se espera que el alumno ubique los ejes como más crea conveniente.
   b) ¿La longitud de los lados se conservó en las figuras que trazaste? Sí
      ¿Cómo puedes demostrarlo? Comparando sus dimensiones
   c) ¿Cómo solucionaste el problema de tener ángulos internos tan grandes y pequeños a la vez? Teniendo la mayor precisión posible al momento de realizar los trazos.
   d) ¿Cómo puedes demostrar que los ángulos de las figuras que obtuviste corresponden a los de la figura original? Tomando sus medidas y comparándolas.

2. Compara tu trabajo con el de algunos compañeros y analiza si se traza una figura para obtener otra simétrica con respecto a un eje y luego cambias de posición alejando o acercando la figura original al mismo eje, ¿qué ocurre con la distancia de los vértices y con la posición de los lados homólogos? Haz una descripción que explique esta relación entre los cambios de distancia y la posición de las figuras obtenidas.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 4	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

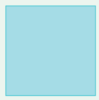
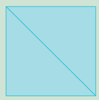
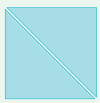
ACUÉRDATE DE...

1. Diseñen una estrategia para que cada integrante del equipo de trabajo trace un triángulo rectángulo isósceles, pero cada uno debe construirlo con diferentes medidas en sus lados.
2. Utilicen su juego de geometría y, tomando como base el lado mayor, construyan un cuadrado.
   a) ¿Cuántas veces cabe el triángulo isósceles en el cuadrado? Cuatro veces
   Entonces, ¿cuál es la relación entre la superficie de este triángulo con la del cuadrado? $\frac{1}{4}$
   b) ¿Influyó en el resultado el hecho de que todos tuvieran triángulos de diferente tamaño? No
   ¿Por qué ocurrió esto? Porque al ser la misma figura sus dimensiones cambian de manera proporcional.
   c) ¿Ocurrirá lo mismo si se utiliza un triángulo rectángulo escaleno? No
   Justifiquen su respuesta. Al poder ser una base mayor o menor con relación a los otros lados, no es posible que la relación de área sea $\frac{1}{4}$.
   d) ¿Y si se utiliza un triángulo equilátero? Tampoco es posible, de hecho ni siquiera coinciden la altura del triángulo con un cuadrado que tenga de base uno de sus lados.
3. Contrasten sus respuestas con las de otros equipos y, con la asesoría del profesor, elaboren una hipótesis acerca de cuál es la relación entre la superficie de un cuadrado y de un triángulo rectángulo, si se toma como lado del cuadrado el lado más largo del triángulo.

PRACTÍCALO

Actividad 4.1

1. Uno de los teoremas más importantes de las matemáticas es el de Pitágoras, y para que se inicien en la comprensión de este tema, sigan la secuencia de pasos y respondan las preguntas.

a) Tomen una hoja de papel y tracen un cuadrado de tamaño mediano (entre 4 y 8 cm de lado)	
b) Tracen una de sus diagonales.	
c) Corten el cuadrado y luego recorten por la diagonal para formar dos triángulos.	

Cómo enriquecer la actividad

A partir de la experiencia que tienen los alumnos sobre la relación que hay entre cuadrados y triángulos, puede aprovechar la sección **Acuérdate de...** para retomar los conocimientos adquiridos.

Qué observar

Pida con anticipación los materiales que necesitarán para esta actividad. Cerciórese de que los alumnos realizan correctamente cada uno de los dobleces y cortes que se piden, y así puedan responder las preguntas que se plantean.

Dé un tiempo razonable para que la realicen, cuide que no ocupen toda la clase.

Recursos y materiales

Consulte la página de internet de *Geometría Dinámica*, donde encontrará actividades, demostraciones y recomendaciones de sitios que le permitirán enriquecer el tema.

http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm

Bitácora pedagógica

Cómo enriquecer la actividad

Seleccione a uno de los equipos para que reproduzca esta actividad en un papel más grande, a fin de que al terminar la actividad la expongan a todo el grupo, y así el resto de los equipos pueda corroborar sus resultados o aclarar sus dudas.

Qué observar

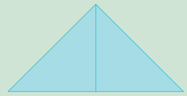
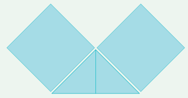
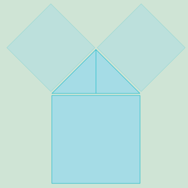
Cerciórese mediante cuestionamientos si los alumnos pueden clasificar los diferentes tipos de triángulos.

Deles un tiempo razonable para leer y analizar la situación planteada, así como la estrategia que seguirán para su resolución. Recorra el salón de clases para verificar que utilizan de manera adecuada las unidades de área.

Curiosidades, acertijos y más

Comente a los alumnos que durante años el teorema de Pitágoras ha merecido la atención de muchos matemáticos, sobre todo en la antigüedad. En la actualidad, se han registrado aproximadamente 370 demostraciones de este teorema.

Matemáticas 3. Por competencias

d) Formen ahora un triángulo isósceles con ambos triángulos.	
e) Tomen como base los congruentes del triángulo isósceles y construyan un cuadrado para cada uno.	
f) Corten estos cuadrados de la manera más sencilla que puedan y con estas piezas traten de formar el cuadrado cuyo lado sea la base del triángulo.	

- ¿De qué manera acomodaron los triángulos para cubrir la superficie del cuadrado mayor? Se dividen los dos cuadrados por la mitad y con estas cuatro piezas se puede formar el cuadrado del lado mayor.
- ¿De qué tipo de triángulo se trata? Isósceles
- ¿Cuál es la medida de sus ángulos internos? Uno recto (90°) y dos agudos de 45°.
- Si consideran al triángulo central como uno solo, ¿cuál es la relación que pueden establecer entre los cuadrados de los lados iguales con el cuadrado que se puede formar en el lado mayor? La suma de los ángulos centrales es 360° y la suma de los 4 ángulos del cuadrado también.
- ¿Qué relación hay entre los lados de mayor tamaño de cada triángulo con el ángulo opuesto de cada uno? Al lado mayor se opone el mayor ángulo.
- De qué manera expresarían la relación entre los cuadrados de los lados más cortos en comparación con el cuadrado del lado mayor. Al lado mayor se opone el mayor ángulo.

2. Comparen y comenten con el grupo las diferentes estrategias que utilizaron, así como las repuestas; despues, con ayuda del profesor, elaboren una definición que exprese esta relación.

PRACTÍCALO **Actividad 4.2**

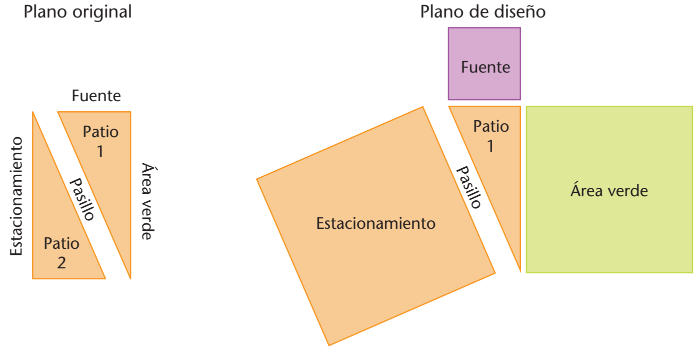
1. Para conocer la relación que existe entre los triángulos escalenos y los cuadrados de sus lados, analicen el siguiente plano.

   a) En una escuela se desea hacer una remodelación en los jardines. Actualmente el jardín es atravesado por un pasillo, las mejoras que se buscan son: construir una nueva área verde, hacer espacio para colocar una fuente y quitar el segundo patio para ampliar el estacionamiento.

   El diseño está hecho para que cada nueva sección se construya en forma cuadrada para cada lado del triángulo que forma el patio 1.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

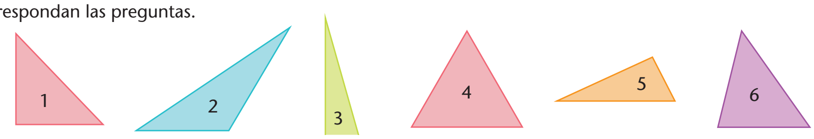


- Si el lado del cuadrado de la fuente mide 9 m y el de la sección verde mide 12 m, ¿cuáles son las áreas de la fuente y del jardín, respectivamente? 81 m^2 y 144 m^2 respectivamente.
- ¿Cuánto mide la superficie que quieren utilizar para el estacionamiento si el largo del pasillo es de 15 metros? 225 m^2
- ¿Qué tipo de relación se puede establecer entre las areas más pequeñas y el área mayor? La suma de las dos áreas pequeñas es igual a la suma del área mayor.
- Tomando como base los lados del triángulo que representa al patio 1, ¿a que clasificación pertenece? Se trata de un triángulo rectángulo.

2. Comparen sus respuestas, expliquen de forma grupal cuáles son las condiciones necesarias para que se dé esta relación de cantidades.

PRACTÍCALO **Actividad 4.3**

1. En el patio de la escuela, el maestro de matemáticas pintó unos triángulos de diversas formas y pidió al grupo que los analizaran y describieran.
   a) Resuelvan la actividad que propuso el profesor, para ello midan cada lado de los triángulos mostrados en la imagen y obtengan el cuadrado de cada lado y, con base en las conclusiones de la actividad anterior, respondan las preguntas.



- ¿Cuáles triángulos presentan una relación entre los cuadrados de sus lados? El triángulo 1, el 3 y el 5.
- ¿Cómo determinaron esta condición? Son los que presentan un ángulo recto.
- ¿Qué triángulos no son rectángulos? El triángulo 2, el 4 y el 6.
- ¿De qué manera determinaron esto? Encontrando la relación entre los cuadrados de sus lados.
- Por lo tanto, los triángulos rectángulos son: El triángulo 1, el 3 y el 5.

Cómo enriquecer la actividad

Seleccione a dos parejas para que expongan ante el grupo sus resultados y estrategias; recuerde que puede haber varias soluciones, pero lo más importante es llegar al resultado deseado.

De ser necesario, proponga nuevas situaciones para reforzar el conocimiento de los alumnos.

Qué observar

De los diferentes triángulos propuestos, observe que la obtención de los cuadrados es el correcto. Cerciórese de que el lado de cada triángulo sea el correcto para construir el cuadrado que se pide.

Reflexión

La exposición en Matemáticas es la mejor forma para detectar y corregir a tiempo los errores de los alumnos, relacionados al manejo del lenguaje, ya que éste es universal. Permita que expongan, y al final retome la situación para hacer, si es necesario, un cierre pertinente.

Bitácora pedagógica

Cómo enriquecer la actividad

De ser necesario, lleve al grupo al patio de la escuela; luego, pídales que dibujen unos triángulos, y con gises de colores tracen el cuadrado.

Seleccione a uno de los equipos para que en el salón de clases expongan la estrategia que utilizaron para llegar al resultado esperado, tanto en la actividad del libro como en la actividad fuera del salón de clases.

Qué observar

Observe que los alumnos nombren de manera correcta cada triángulo, a partir del número de lados y de sus ángulos.

Verifique que sus respuestas sean correctas, así como sus justificaciones.

Qué observar

Dé tiempo para que los alumnos lean la información de este apartado, y empiecen a comprender los términos de cateto e hipotenusa, que serán de mucha utilidad en el siguiente bloque.

- ¿Qué diferencia hay en la relación de los cuadrados de los lados de los triángulos 3 y 5? En ambos la suma de los cuadrados menores es la misma que el cuadrado del lado mayor.
- ¿Cómo se llaman respectivamente estos triángulos? Triángulos rectángulos
- ¿Qué diferencia se puede establecer al sumar los cuadrados de los lados menores en relación con el cuadrado del lado mayor para los triángulos 1, 2 y 6? En 1 la suma de los cuadrados de los lados menores es igual al cuadrado del mayor, en 2 es menor y en 5 es mayor.

2. Completen la tabla, determinen el nombre de cada triángulo con base en la clasificación de sus lados y sus ángulos, y registren los datos de las últimas dos columnas.

Triángulo	Nombre del triángulo por: Sus lados	Sus ángulos	Suma de los cuadrados de los lados menores	Cuadrado del lado mayor
1	Isósceles	Rectángulo	Se espera que los alumnos concuerden en que los triángulos 1, 3 y 5 corresponden a la igualdad, entre la suma de sus áreas menores con relación a la mayor y que en los otros tres triángulos la relación es mayor o menor, pero no igual.	
2	Escaleno	Obtusángulo		
3	Escaleno	Rectángulo		
4	Equilátero	Acutángulo		
5	Escaleno	Rectángulo		
6	Escaleno	Acutángulo		

- ¿En cuál de los triángulos la suma de los cuadrados de los dos lados menores fue mayor al cuadrado del lado mayor? Solo en el triángulo 6.
- ¿Qué provocó esta situación? Que no contiene un ángulo recto.
- ¿En qué triángulo no fue posible determinar la relación entre los lados? En el equilátero

  ¿Por qué ocurrió esto? Porque todos sus lados son iguales.
- ¿En qué triángulo la suma de los cuadrados de los lados menores fue menor al cuadrado del lado mayor? Solo en el triángulo 6.
- ¿Qué originó esta condición? Que todos los ángulos internos son agudos.
- ¿En qué triángulos sí se cumplió con la condición de que la suma de los cuadrados de los lados menores fuese igual al cuadrado del lado mayor? En el 1, 3 y 5.
- ¿Qué característica en común tienen estos triángulos, que permitió que se cumpliera con la condición buscada? Que todos son triángulos rectángulos.

3. Revisen sus respuestas en equipo y, con el profesor, determinen: ¿por qué sólo es aplicable esta relación de superficies en determinados triángulos?

Para tener en cuenta

Pitágoras utilizó su teorema para resolver muchos problemas de la vida cotidiana, por ejemplo, para conocer la altura de una construcción, basándose en su sombra, o para calcular la longitud que debe tener una escalera, dependiendo de la altura que se requiera que alcance; para ello desarrolló algoritmos matemáticos.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

En la actividad anterior analizaron la relación que tienen los cuadrados de los **catetos**, es decir, los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo con la **hipotenusa**, es decir, el lado que forma el cuadrado del lado más largo. Es momento de experimentar con el uso del triángulo rectángulo y los cuadrados de los lados que forman el ángulo recto para representar la relación entre los cuadrados de cada lado, pero de manera algebraica para que puedan describir y definir esta relación, como lo hizo Pitágoras.

Glosario

Cateto. Son los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.

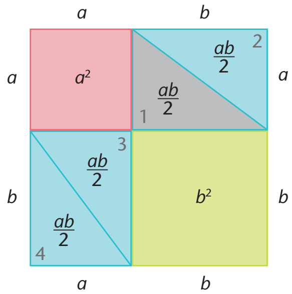
Hipotenusa. Es el lado mayor opuesto al ángulo recto.

PRACTÍCALO

Actividad 4.4

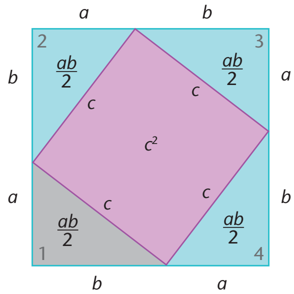
1. Comparen y analicen las figuras mostradas.

Figura 1



$(a + b)^2$

Figura 2



$(a + b)^2$

a) Ambas figuras representan la misma superficie, son cuadrados y sus lados miden lo mismo. Considerando la información anterior, respondan las preguntas.

- Tomando como base el binomio que representa un lado, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el área total para ambas figuras?, es decir, $(a + b)^2 =$ $a^2 + 2ab + b^2$
- ¿Cómo se puede representar esta misma superficie, pero con base en los cuatro triángulos rectángulos indicados en la figura 1?, es decir, $(a + b)^2 =$ $a^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) + b^2$
- ¿Cómo se puede representar esta misma superficie, pero con base en los cuatro triángulos rectángulos indicados en la figura 2?, es decir, $(a + b)^2 =$ $4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2$
- Ya que las dos expresiones algebraicas que obtuvieron representan la misma cantidad es posible igualarlas entre sí. Escriban cómo queda esta expresión algebraica. $a^2 + \left(\frac{ab}{2}\right) + b^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2$
- Ahora simplifiquen la expresión reduciendo los términos semejantes. Escriban la expresión final que obtuvieron. $a^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) + b^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2$ Por lo tanto queda $a^2 + b^2 = c^2$

2. Comparen sus resultados con los de otro equipo y, con la ayuda de su profesor, elaboren una definición que explique, cómo se debe interpretar la relación entre la suma de los cuadrados de los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo y el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto.

Cómo enriquecer la actividad

Propicie que por equipos vayan presentando las respuestas que se plantean y que entre ellos realicen las aclaraciones a las dudas que surjan. De ser necesario, apóyelos.

Transversalidad

Ciencias 2, Física

Verifique que los alumnos apliquen lo que han aprendido con temas de Ciencias 2, Física, como por ejemplo en la resolución de problemas de vectores, método del triángulo, etcétera.

Recursos y materiales

En la página *Geometría Activa* encontrará algunas sugerencias para enriquecer su clase y trabajar este tema con los alumnos.

http://encina.pntic.mec.es/rroc0001/webquest/trirectangulo/t1.htm

Bitácora pedagógica

Qué observar

Verifique que el alumno comprende que al utilizar cuadrados de diferente área se puede formar un triángulo rectángulo, o que de un triángulo rectángulo se pueden formar cuatro cuadrados de áreas distintas. Asegúrese de que los resultados obtenidos de los valores de x son los correctos.

Ponga énfasis en la comprobación de los resultados.

Cómo enriquecer la actividad

Proponga nuevos ejercicios para que el alumno continúe reforzando el aprendizaje, o bien pida que él los proponga, sobre todo que empiece a familiarizarse con la expresión $c^2 = a^2 + b^2$.

Reflexión

Promueva el diálogo entre el grupo y cada expositor, con la idea de considerar los diferentes tipos de procedimientos utilizados. En Matemáticas, los procedimientos para llegar a la respuesta correcta pueden ser muchos.

Matemáticas 3. Por competencias

LO QUE APRENDÍ

1. En la escuela se realizó un concurso de matemáticas; hubo cuatro alumnos que empataron en primer lugar. Para determinar al ganador, el comité decidió poner un problema similar a cada uno de ellos, pero con diferentes datos, y el que lograra resolverlo y explicarlo con más claridad sería el triunfador.

Figura 1

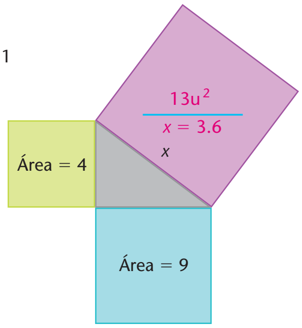


Figura 3

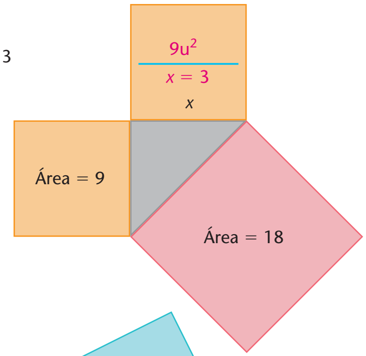


Figura 2

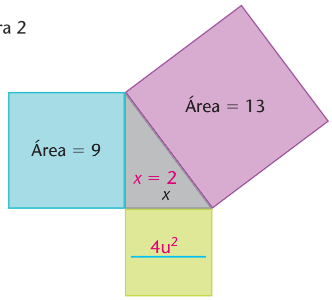
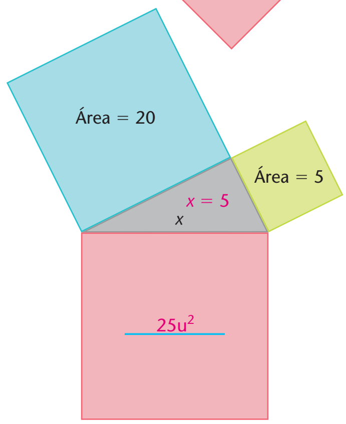


Figura 4



- ¿Qué proceso utilizaste para encontrar la superficie faltante de la figura 1?
  Se suman las 2 áreas.
- ¿Cómo determinaste la medida del lado indicado con la letra x en la figura 1?
  Sacando la raíz cuadrada del área mayor.
- ¿Cómo determinaste la medida de la superficie faltante en la figura 2?
  Restando la superficie conocida menor de la mayor.
- Explica, ¿qué similitudes o diferencias ocurrieron al determinar las medidas de los lados y las medidas de los lados indicados para las figuras 3 y 4 con respecto a las figuras 1 y 2?
  Para encontrar el área de lado mayor se suman las dos menores y para calcular el área de un lado menor se resta la superficie menor conocida a la superficie mayor.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

- ¿Consideras que las cuatro figuras tienen el mismo nivel de dificultad para resolverlas? Justifica tu respuesta. Es posible que el alumno considere que son más complejas las figuras donde se debe restar.
- Si el ganador del concurso fue el que tenía la figura más sencilla de explicar, responde: ¿cuál de las cuatro figuras puede ser explicada con más facilidad? La figura 1
  ¿Por qué consideras esto? Por el dato que hay que encontrar y la posición en la que se encuentra.

2. Coteja tus resultados con los de algunos de tus compañeros cercanos y elabora un comentario en tu cuaderno que explique qué diferencia encontraste en el procedimiento cuando se calcula el cuadrado de la hipotenusa a cuando se calcula el cuadrado de alguno de los catetos.

Desarrolla tus habilidades

1. En las calles cercanas a una zona de escuelas piensan colocar algunos anuncios de educación vial, los carteles van preparados con un tubo que les permita ensamblarlos fácilmente.
   a) Reúnanse en equipos, analicen la figura y determinen, ¿cuál es la longitud que debe tener el tubo si su medida equivale a la altura del triángulo equilátero que forma el anuncio?

- ¿Cuál es la longitud del tubo? 43.3 cm
- ¿Qué método o procedimiento utilizaron para determinar la longitud del tubo? Se calcula la mitad de un lado (25), con este dato se calcula la altura con la expresión $x^2 + 25^2 = 50^2$ al resolver $x = 44.3$
- ¿Cómo se puede comprobar que la medida es la adecuada? Resolviendo la expresión $43.3^2 + 25^2 = 50^2$

2. Comparen sus estrategias y resultados con los de otros equipos y, con la ayuda del profesor, determinen, ¿cuál planteamiento es más adecuado?, y si es posible obtener este dato usando algún otro método.

USA LAS TIC

En la página http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras.html (Consultada el día 14 de marzo de 2013, a la 13:44 horas), encontrarás más información acerca de este tema, así como un interactivo para su demostración. Compara lo que veas con lo que aprendiste en este libro y elabora un comentario acerca de tu visita a esta página. Compártelo con tu profesor y pídele de que te dé su opinión respecto a la página.

Qué observar

Esta actividad está diseñada para que el alumno ponga en práctica lo que ha aprendido. Observe que tanto el planteamiento como sus resultados son los correctos, así como las unidades que manejan sean las apropiadas con lo que se pide.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que modelen situaciones donde puedan aplicar lo que han aprendido hasta el momento, y sin hacer uso del teorema, que justifiquen cómo lo pueden resolver.

Si surgen dudas, que las aclaren con los alumnos que comprendieron, y si aún así éstas persisten, intervenga y proponga nuevas situaciones.

Bitácora pedagógica

Transversalidad

Ciencias 2, Física

El teorema de Pitágoras se aplica en diversas disciplinas de la Física, recurre a tus notas anteriores o visita a tu profesor de Ciencias para conocer estos temas. Realiza uno o dos ejercicios para saber cómo estas dos áreas de estudio están íntimamente relacionadas.

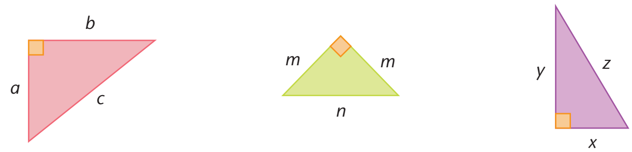
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 5	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

ACUÉRDATE DE...

1. En una fábrica de artículos de hierro se están estudiando algunas nuevas formas para las escuadras de repisa. Como los tamaños son variados, se decidió utilizar letras para encontrar una expresión que permita trabajar con cualquier tamaño. Ustedes, en el contenido anterior, aprendieron a relacionar los catetos de un triángulo rectángulo con la hipotenusa.

   Analicen los triángulos mostrados en la imagen y definan una estrategia para encontrar las medidas que los relacionan y registren sobre las líneas los datos solicitados.

Triángulo A Triángulo B Triángulo C



a) Para el triángulo A:
- ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona los catetos con la hipotenusa? $a^2 + b^2 = c^2$
- Con base en esta expresión, ¿cómo se puede expresar el valor de c^2? Sumando $a^2 + b^2$
- ¿Cómo se expresa el valor de a^2? $a^2 = c^2 - b^2$
- Entonces, de qué manera se expresan algebraicamente los valores de a, b y c con base en la relación de los lados de un triángulo rectángulo, registren sus expresiones.

  $a =$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b =$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $c =$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

b) Para el triángulo B:
- ¿Cómo se expresa el valor de n^2 en relación con los catetos? $a^2 = c^2 - b^2$
- ¿Cómo se expresa el valor para cualquiera m^2? $m^2 = n^2 - m^2$
- ¿De qué manera determinaron esta expresión? Restando del área mayor la superficie de uno de los lados menores.

c) Para el triángulo C:
- Registren la relación que representa cada uno de los lados con una expresión algebraica

  $x^2 = z^2 - y^2$ $y^2 = z^2 - x^2$ $z^2 = x^2 + y^2$

  Por lo tanto:

  $x = \sqrt{z^2 - y^2}$ $y = \sqrt{z^2 - x^2}$ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Entonces, si tomamos como base la expresión z^2, ¿de qué manera se lee esta expresión algebraica? El área del lado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadrados menores en un triángulo rectángulo.
- ¿Cómo leerían esta expresión algebraica en voz alta para el valor de z^2? De la misma manera.

2. Comparen sus resultados con los de algunas parejas cercanas y con la ayuda del profesor determinen, ¿de qué manera se puede expresar esta misma relación para cualquier triángulo rectángulo?

Qué observar

La actividad **Acuérdate de...** tiene como propósito reubicar al alumno en el contexto de los triángulos rectángulos y la ubicación de los catetos e hipotenusa, así como la fórmula que se obtiene.

Cómo enriquecer la actividad

Observe el trabajo de los alumnos, si las respuestas que dan a cada pregunta no son las apropiadas, guíelos con algunos consejos, para que de esta forma vayan construyendo su conocimiento.

Recursos y materiales

En la siguiente página encontrará ejercicios que le ayudarán a reforzar el tema. Pida a los alumnos que ingresen y los resuelvan, al final que corroboren sus resultados.

http://tareateoriadenumeros.wikispaces.com/file/view/Teorema+de+Pit%C3%A1goras.swf

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

Para tener en cuenta

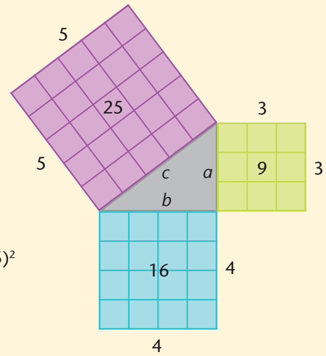
El teorema de Pitágoras dice: para cualquier triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Si
$a = 3$ cm
$b = 4$ cm
$c = 5$ cm

Y sabemos que:
$a^2 + b^2 = c^2$

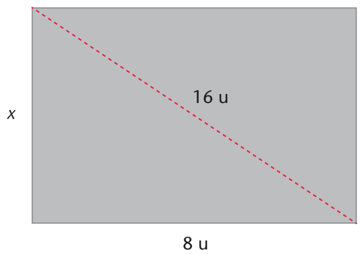
Entonces:
$(3)^2 + (4)^2 = (5)^2$

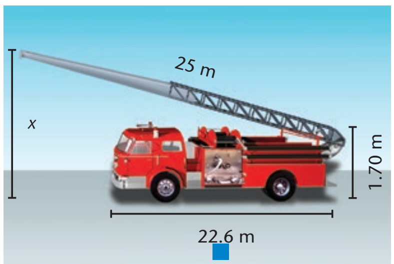
Por lo tanto:
$9 + 16 = 25$



PRACTÍCALO **Actividad 5.1**

1. En la sección anterior analizaron el triángulo rectángulo basándose en una pirámide, ahora analizarán la aplicación del teorema de Pitágoras en combinación con algunos rectángulos.
   a) ¿Cuánto mide la altura del rectángulo dado? 13.58u
   b) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite encontrar el valor de x? $x = \sqrt{16^2 - 8^2}$
   c) ¿De qué manera realizaron el planteamiento de esta expresión? Como se busca un lado menor al cuadrado de 16 se le resta el cuadrado de 8 y se obtiene raíz.
   d) ¿A qué distancia del piso se encuentra el extremo de la escalera telescópica del camión de bomberos? 12.38 m





- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite solucionar esta situación? $x = \sqrt{25^2 - 22.6^2} + 1.7$
- ¿Cuál es la estrategia que utilizaron para encontrar el valor de x? Se calcula el valor de x sin la altura del camión y al final se suma.

2. Comparen sus resultados con los de un equipo cercano y determinen qué condiciones debe tener una situación para que se opte como método de solución el teorema de Pitágoras.

Qué observar

Dé tiempo para que los alumnos lean el apartado correspondiente al teorema de Pitágoras. Pídales que observen el área de cada uno de los cuadrados que están en cada lado del triángulo rectángulo.

Cómo enriquecer la actividad

En esta actividad es importante que los alumnos acuerden el grado de precisión de las respuestas (¿hasta dos cifras decimales?, ¿con truncamiento o redondeo?) y que un equipo pase al pizarrón a resolver la situación y, a partir de ello, comente sus procedimientos. Si alguno de los alumnos tiene dudas, que sea su equipo quien las aclare.

Cambiando números

Indique a los alumnos que en la imagen del camión de bomberos la línea de abajo debe llegar hasta x.

Curiosidades, acertijos y más

Comúnmente se ha comentado que el teorema de Pitágoras no fue deducido por él, sino por un alumno de su escuela años después, aunque ambos eran contemporáneos, es decir, vivieron en el siglo VI a.C.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Verifique que el planteamiento y la ubicación, tanto de los catetos como de la hipotenusa, están bien ubicados, así como el uso correcto de la expresión $c^2 = a^2 + b^2$.

Observe que la raíz cuadrada, para encontrar el valor de la hipotenusa (la longitud del tensor) es el correcto, recuerde que su longitud es mayor a la longitud de los catetos.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a uno de los equipos que exponga cómo resolvió esta situación y que enfatice cómo obtuvieron la expresión $a^2 = c^2 - b^2$, donde para encontrar el valor de uno de los catetos se saca la raíz cuadrada de lo que se encuentra en el otro lado de la igualdad

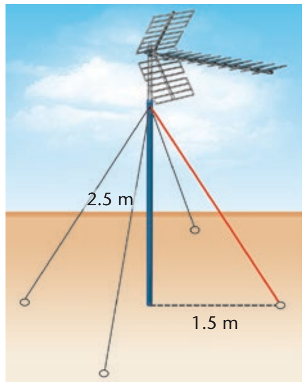
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Si hay dudas sobre el despeje de variables, deje ejercicios para que el alumno los resuelva en casa. Recuerde que cada trabajo extra de reforzamiento también debe revisarse.

PRACTÍCALO — **Actividad 5.2**

Analicen las siguientes situaciones y respondan las preguntas planteadas.

1. El papá de Emilia compró una antena para televisión, la antena estará sujeta a un tubo que mide 2.5 m de longitud; a una distancia de 1.5 m de la base colocará los soportes que sujetarán los tensores de alambre para fijarla.



   a) Analicen el esquema y diseñen una estrategia que les permita saber, ¿cuál es la longitud que deben tener estos alambres tensores? 2.91 m

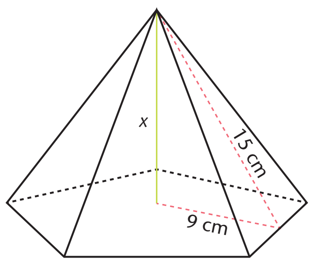
   - ¿De qué manera se puede representar algebraicamente la longitud de cada tensor? $x^2 = 2.5^2 + 1.5^2$
   - Considerando el triángulo rectángulo que se forma, ¿qué parte representa cada tensor? El lado mayor de cada triángulo.
   - ¿Qué expresión algebraica representa la longitud que debe tener cada tensor? $x = \sqrt{2.5^2 + 1.5^2}$
   - ¿Cuál es la longitud de cada tensor? 2.91 m
   - Si el alambre lo compra por metros, ¿cuántos necesita como mínimo para fijar la antena si va a poner al menos cuatro tensores? 12 m

   b) Registren en su cuaderno la expresión algebraica que plantearon, así como el desarrollo del algoritmo para obtener el resultado. ¿Hay alguna diferencia al resolver operaciones cuando los datos son números decimales a cuando son naturales? No

2. Algunos fabricantes de objetos decorativos utilizan las pirámides para crear adornos, por ejemplo, las pirámides de base pentagonal. De todas sus dimensiones la única que no se puede medir de manera directa es la altura de la pirámide.

   a) Analicen la imagen de la pirámide con los datos dados y respondan:

   - ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular el valor de la altura de la pirámide? $x = \sqrt{15^2 - 9^2}$
   - ¿Cuánto mide la altura? 12 cm
   - Expliquen, ¿cómo se debe realizar el planteamiento de la expresión que permite solucionar esta situación? Al cuadrado del lado mayor se le resta el cuadrado del apotema del pentágono.
   - ¿Cómo explicarían la relación entre la pirámide, el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras? El triángulo rectángulo se forma con las medidas dadas y permite calcular una medida que directamente no sería posible.



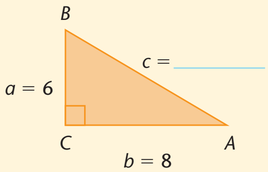
3. Comparen sus resultados con los obtenidos por otros equipos y, con la ayuda del profesor, determinen, ¿cuál es la relación que se puede establecer entre una pirámide y el teorema de Pitágoras?

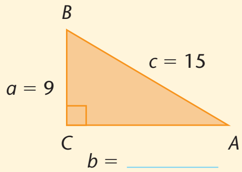
Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

Para leer más

Desarrollar un algoritmo de manera clara, limpia y ordenada reduce la posibilidad de errores durante el proceso, en este caso, se puede desarrollar de esta manera.





$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= c^2 \\
6^2 + 8^2 &= c^2 \\
36 + 64 &= c^2 \\
100 &= c^2 \\
\sqrt{100} &= c \\
10 &= c \\
c &= 10
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= c^2 \\
9^2 + b^2 &= 15^2 \\
81 + b^2 &= 225 \\
b^2 &= 225 - 81 \\
b^2 &= 144 \\
b &= \sqrt{144} \\
b &= 12
\end{aligned}
$$

Alinear los signos "igual a", siempre es muy útil.

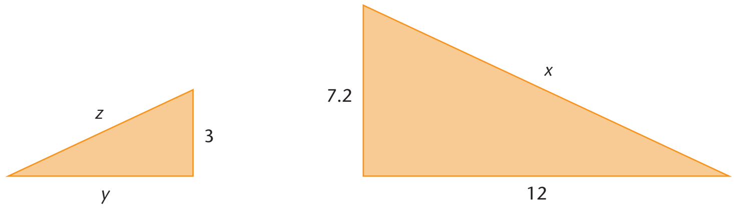
PRACTÍCALO

Actividad 5.3

1. Analicen el problema planteado y contesten las preguntas.

En ocasiones, para aplicar el teorema de Pitágoras es necesario auxiliarse de otros procedimientos que nos permitan obtener los datos que falten.

a) Estos triángulos son semejantes, determinen el valor de las literales indicadas.



- ¿Cuál de las tres literales es la que resolvieron primero? x
- ¿Cuál es el valor de x? 14 ¿Cuál es el valor de y? 5 ¿Cuál es el valor de z? 5.8
- Describan, ¿cuál es la estrategia para encontrar el valor de las tres literales?

Primero se determina el valor de x por el teorema de Pitágoras, con estos valores se puede utilizar una proporcionalidad para calcular "y" o "z" y por último se calcula el valor faltante nuevamente con el teorema de Pitágoras.

Qué observar

Solicite a los alumnos que revisen este apartado, que indica la manera correcta de plantear un ejercicio con el teorema de Pitágoras; dé un tiempo razonable para ello.

Cómo enriquecer la actividad

Permita que el grupo vaya organizando la participación, al dar respuesta a las preguntas planteadas en esta actividad. Recuerde que el propósito es que los alumnos alcancen la autonomía en su aprendizaje.

Transversalidad

Ciencias 2, Física

Es común que para encontrar la altura de un edificio o profundidad de un pozo, utilicemos en Física la fórmula $h = gt^2$, cuando se deja caer un objeto libremente, ¿de qué manera se podría conocer la altura o profundidad utilizando el teorema de Pitágoras?

Bitácora pedagógica

Qué observar

Verifique que de manera individual el alumno es capaz de plantear y aplicar el teorema de Pitágoras en diversas situaciones. Observe que la manera de colocar los valores sean los adecuados, ya que se pueden presentar diversos errores.

Cómo enriquecer la actividad

En esta etapa del curso, es muy probable que el alumno haya adquirido las habilidades necesarias para resolver este tipo de situaciones. Permita que el grupo externe sus opiniones, procedimientos y resultados. Dé la oportunidad a los alumnos de comunicar y argumentar, con la idea de validar soluciones.

Matemáticas 3. Por competencias

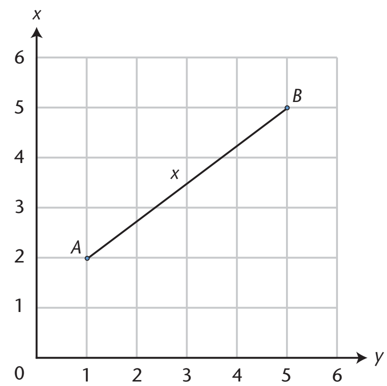
- ¿Qué otros procedimientos, además del teorema de Pitágoras, tuvieron que utilizar para resolver la situación? Una proporción
- ¿Cuál literal corresponde al último valor que encontraron? Puede ser "y" o "z".
- ¿Qué operación realizaron para encontrar el valor de esta última literal? Teorema de Pitágoras
- ¿Es posible obtener este resultado utilizando otro procedimiento? Sí

  Justifiquen su respuesta. Por medio de otra porción es posible llegar nuevamente al mismo resultado.

2. Comparen sus resultados con los de algunas parejas cercanas y con el profesor elaboren una explicación breve de cómo se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa o alguno de los catetos de un triángulo rectángulo y den algunos ejemplos de dónde se aplican en la vida diaria.

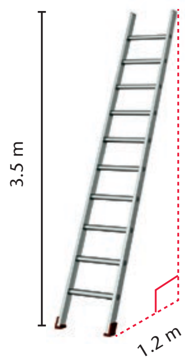
LO QUE APRENDÍ

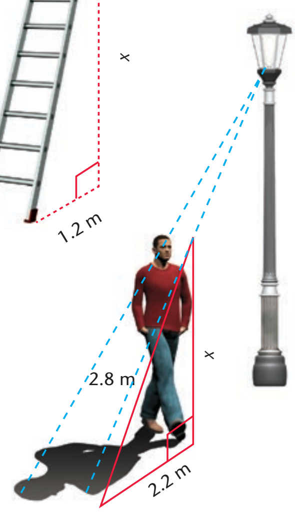
1. En esta actividad trabajarás con el teorema de Pitágoras en distintos casos de la vida cotidiana. Analiza los esquemas dados y encuentra el valor de *x* en cada situación.



Valor del segmento *AB*: 5u

Altura que alcanza la escalera: 3.28 m





Estatura de la persona: 1.73 m

- Escribe en tu cuaderno el desarrollo de las operaciones y comprueba tus resultados.

2. Compara tus resultados con los de algunos compañeros y, con la ayuda del profesor, elabora una síntesis que explique de manera concreta, ¿qué es el teorema de Pitágoras y cómo se aplica de manera práctica en la solución de problemas?, diseñen un problema propio de manera grupal donde se aplique el teorema de Pitágoras y resuélvanlo por equipos; comparen sus resultados y verifiquen que sean correctos.

Curiosidades, acertijos y más

En el libro matemático-filosófico de Chon Pei Suan O Ching se encuentra una demostración de este teorema mediante la descripción de este mismo teorema a la que llegó Pitágoras.

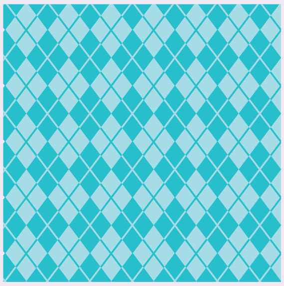
Bitácora pedagógica

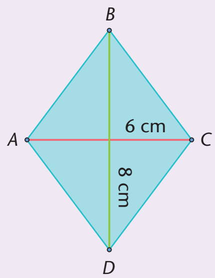
BLOQUE 2

Desarrolla tus habilidades

1. En la industria textil, las figuras con rombos siempre han tenido mucha aceptación. Analiza una de estas figuras y la relación que tiene con el teorema de Pitágoras.

   a) Diseña una estrategia para conocer cuánto mide el perímetro del rombo, según las medidas indicadas en la figura inferior, considera que los datos que se dan es la longitud total de los dos ejes.





Perímetro = ____________

- ¿Cuál es la medida del perímetro? 40 cm^2
- ¿Cuál fue la estrategia que utilizaste? Se calcula un lado y se multiplica por 4.
- ¿Cuáles fueron las medidas que tomaste de base para poder aplicar el teorema de Pitágoras? ____________
- ¿Qué longitud tuviste que calcular, la de un cateto o de la hipotenusa? La de la hipotenusa

2. Analiza tus resultados con tus compañeros y con la ayuda del profesor demuestra que tu procedimiento fue el más adecuado o si pudiste realizarlo de una forma más simple y efectiva.

USA LAS TIC

En la página http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm (Consultada el día 4 de marzo de 2013) podrás encontrar algunas demostraciones del teorema de Pitágoras, después de visitarla compara los procedimientos mostrados con el que aprendiste en este libro y determina cuál te agradó más.

Explica por qué.

Qué observar

Recorra el salón de clases para verificar que los alumnos realizan de manera adecuada el planteamiento para esta situación. Revise que la solución es igual en la mayoría de los alumnos. Cerciórese de que la revisión de este contenido está bien sustentado.

Cómo enriquecer la actividad

Propicie la participación del grupo, para que las dudas que surjan las resuelvan ellos mismos. Si es necesario, y si después de hacerles una serie de preguntas todavía hay dudas, pídales que visiten la página de internet que sugiere el libro para que puedan resolverlas.

Transversalidad

Historia 1

En la antigüedad, las condiciones socioculturales y políticas no eran iguales a las que se presentan en la actualidad. En la época en que vivió Pitágoras, se carecía de muchas herramientas que pudieran utilizarse para hacer demostraciones. Estas se efectuaban observando, analizando y concluyendo. Por esta razón, no solo a Pitágoras se le ve con admiración por sus aportaciones a las matemáticas, sino también a otros pensadores griegos.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Aproveche la actividad **Acuérdate de...** para que se recuperen los conocimientos previos que el alumno ya tiene en temas como combinaciones y probabilidad.

Cómo enriquecer la actividad

Que los representantes de cada equipo expongan una a una, cada pregunta y su respuesta correspondiente, haciendo la justificación respectiva. Permita el diálogo y la lluvia de ideas. Aproveche la oportunidad para proponer situaciones o experimentos en los que se utilicen los materiales con los que se cuenta, por ejemplo: dados y monedas.

Recursos y materiales

En la página de la *Biblioteca de Manipuladores Virtuales*, en su sección de Análisis de datos y probabilidad, encontrará la actividad Lanzamientos de una moneda, que puede utilizar para introducir el tema.

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_305_g_4_t_5.html?from=topic_t_5.html

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido 6	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

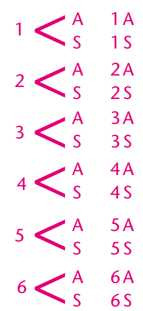
ACUÉRDATE DE...

1. Analicen y resuelvan la siguiente situación.

Jesús y Yarena son hermanos y entre los dos han decidido contribuir con las labores de su casa. Jesús propone lanzar una moneda y un dado al mismo tiempo, por lo que pueden usar un diagrama de árbol, y de esa manera decidir quién hará cada tarea. Yarena piensa que es más conveniente usar un arreglo rectangular.

a) Elaboren el diagrama de árbol y el arreglo rectangular solicitado en cada recuadro.

Diagrama de árbol para el lanzamiento de un dado y una moneda



S	1S	2S	3S	4S	5S	6S
A	1A	2A	3A	4A	5A	6A
	1	2	3	4	5	6

Arreglo rectangular para el lanzamiento de dos dados

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	1–1	2–1	3–1	4–1	5–1	6–1
	2	1–2	2–2	3–2	4–2	5–2	6–2
	3	1–3	2–3	3–3	4–3	5–3	6–3
	4	1–4	2–4	3–4	4–4	5–4	6–4
	5	1–5	2–5	3–5	4–5	5–5	6–5
	6	1–6	2–6	3–6	4–6	5–6	6–6

Bitácora pedagógica

- ¿Cuál de las representaciones consideran que es más adecuada a la situación de lanzar dos dados? Expliquen su respuesta.
  Permita que el alumno exprese su opinión y preferencias.
- ¿En cuál de los dos casos consideran que es más sencillo obtener la posibilidad de ocurrencia de un evento?
  Permita que el alumno exprese su opinión y preferencias.
- ¿Qué es más probable, que salga una pareja de números pares o una cuya suma de los dígitos sea 9?
  Es más probable que salga una pareja de números pares.
- ¿De qué manera llegaron a esta conclusión?
  Hay más combinaciones que están formadas por números pares que combinaciones que sumen 9.

2. Comparen sus resultados con los de dos equipos cercanos y, con la ayuda del profesor, concluyan cuál es la ventaja de hacer esquemas, tablas o diagramas para analizar con seguridad los resultados de un fenómeno como éste.

PRACTÍCALO **Actividad 6.1**

1. Analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

En una secundaria particular dos grupos de tercer grado tienen 30 alumnos cada uno. El grupo A tiene 18 mujeres y el B tiene 13, con estos datos completa la tabla y responde las preguntas.

	Grupo A	Grupo B	TOTAL
Hombres	12	17	29
Mujeres	18	13	31
TOTAL	30	30	60

a) Considera las siguientes probabilidades:

Es hombre

Pertenece al grupo A

Pertenece al grupo B y es mujer

- ¿Es posible seleccionar a un alumno al azar que esté en el grupo B y que sea mujer? Sí
- ¿Es posible que el alumno seleccionado cumpla con las condiciones 2 y 3? No
  Expliquen su respuesta. No puede pertenecer a los dos grupos al mismo tiempo.
- Qué es más probable, ¿que el alumno seleccionado sea mujer o que sea una mujer del grupo B?
  Que sea mujer
- Qué es más probable, ¿que pertenezca al grupo A y que sea mujer?, ¿o que pertenezca a B y que sea mujer? Que pertenezca al grupo A y que sea mujer.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado no sea una mujer del grupo B? $\frac{47}{60}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado sea hombre y esté en el grupo A? $\frac{1}{5}$

Qué observar

Dé un tiempo razonable para que los alumnos analicen la situación. Observe que comprenden y que las respuestas a cada una de las preguntas son las más acertadas. Verifique que sus argumentos sean válidos.

Cómo enriquecer la actividad

Seleccione a una pareja para que exponga ante el grupo cómo fueron contestando cada una de las preguntas planteadas. De manera respetuosa, que sus compañeros escuchen, y si surgen dudas, que éstas sean planteadas con respeto. Permita la realimentación de los alumnos, esto permitirá fortalecer el conocimiento.

Curiosidades, acertijos y más

Comente a los alumnos que la teoría de la probabilidad tiene su origen en los juegos de azar. Hacia 1650, en Francia, un jugador llamado De Mére consultó al matemático Blaise Pascal algunas cuestiones relacionadas con el juego de dados. Pascal mantuvo correspondencia con Fermat, Huygens y Bernoulli. Gracias a todos ellos, la teoría de la probabilidad pasó de ser una mera colección de problemas aislados, relativos a algunos juegos, a ser un sector importante de las Matemáticas.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Pida a los alumnos que lean y analicen la información que se presenta en este apartado, y después la expliquen con sus propias palabras, esto les permitirá comprender aún más el trabajo en este apartado.

Cómo enriquecer la actividad

Si es necesario, pida a los alumnos que reproduzcan los diferentes dados que se presentan en esta actividad, así podrán realizar nuevos experimentos que les permitirán reforzar el conocimiento. Plantee nuevas preguntas para que el alumno, con mayor confianza, las pueda contestar.

Reflexión

El filósofo prusiano Immanuel Kant, decía: "El hombre no llega a ser hombre más que por la educación. No es más que lo que la educación hace de él. Es importante subrayar que el hombre siempre es educado por otros hombres y por otros hombre que también fueron educados". Pida a los alumnos que analicen este pensamiento y expliquen qué significado tiene para ellos.

Matemáticas 3. Por competencias

Para tener en cuenta

Dos eventos son considerados complementarios si al momento de unirlos el resultado es todo el espacio muestral, y cuando se realiza su intersección se obtiene un conjunto vacío.

Dos eventos son independientes cuando la probabilidad de que uno ocurra no depende en ningún momento de la ocurrencia del otro.

USA LAS TIC

Visita la página web http://www.estudiantes.info/matematicas/problemas/3-eso/azar-y-probabilidad.htm (Consultada el 10 de abril de 2013, a las 6:54 horas), en ella encontrarás información de probabilidad y problemas resueltos, puedes comparar esta información con los conocimientos que ya tienes y después de tu visita comenta con tu profesor cuál es tu opinión y en qué consideras que puede serte útil esta información para enriquecer tus conocimientos.

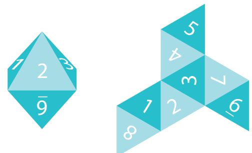
PRACTÍCALO

Actividad 6.2

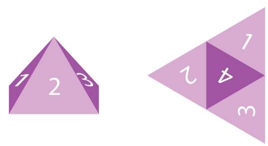
1. Lean la siguiente situación y contesten las preguntas.

En algunos juegos de mesa no sólo utilizan dados con seis caras (cúbicos), también utilizan formas de 4, 8, y hasta 20 caras; para analizar las características de estas piezas tomaremos un tetraedro (4 caras) y un octaedro (8 caras). En la imagen se muestra cada una de estas figuras, así como sus desarrollos planos, lo que permite ver con claridad todas sus caras.

Octaedro



Tetraedro



a) Escriban la probabilidad de que ocurran cada uno de los siguientes eventos.

Octaedro			
Obtener:		**Obtener:**	
Un 3	$\frac{1}{8}$	Un número impar	$\frac{1}{8}$
Un número mayor a 4	$\frac{1}{2}$	Un número par o uno impar	$\frac{1}{2}$
Un número menor a 4	$\frac{3}{8}$	Un múltiplo de 2 o 3	$\frac{1}{2}$
Un número par	$\frac{1}{2}$		

Tetraedro			
Obtener:		**Obtener:**	
Un 4	$\frac{1}{4}$	Un número par o uno impar	$\frac{1}{1}$
Un número que no sea 4	$\frac{3}{4}$	Un número par y mayor que 3	$\frac{1}{4}$
Un número par	$\frac{1}{2}$	Un número menor a 3	$\frac{1}{2}$
Un número impar	$\frac{1}{2}$		

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

b) Contesten las preguntas.

- ¿Cuales son la características de los eventos complementarios? Son los que al sumar su probabilidad da 1.
- Justifiquen su respuesta. Son complementarios, porque las probabilidades de ambos forman un evento seguro.

2. Reúnanse en dos equipos, un equipo comentará la forma en que pueden aplicarse los eventos independientes en la vida cotidiana y el otro equipo comentará cómo pueden emplearse los eventos complementarios en la vida cotidiana, después se nombrará a un representante por equipo para que expongan sus comentarios a los compañeros y entre todos enriquezcan el trabajo.

- ¿Qué probabilidad hay de obtener un 5? $\frac{1}{8}$
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 5 o un 8? $\frac{1}{4}$
- ¿Cómo obtuvieron la probabilidad de obtener un 5 o un 8? Son dos eventos favorables de 8.

Para tener en cuenta

Matemáticamente, la regla de la suma de dos sucesos se expresa como:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Sin embargo, si A y B son mutuamente excluyentes, entonces:

$P(AB) = 0$

Esto será igual a:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Y se lee: la probabilidad de *A* en unión con *B* es igual a la probabilidad de *A* más la probabilidad de *B*.

Para leer más

Aritméticamente, en la suma de dos eventos que son complementarios siempre se obtiene como resultado 1.

PRACTÍCALO

Actividad 6.3

1. Preparen dos dados o, en su defecto, hagan dos grupos de tarjetas numeradas del 1 al 6 y entre tres de los integrantes del equipo hagan el mismo experimento.

a) Tirar ambos dados o elegir al azar dos tarjetas (una de cada grupo). Registren sus resultados en la siguiente tabla.

Alumno 1			Alumno 2			Alumno 3		
Tirada	Dado 1	Dado 2	Tirada	Dado 1	Dado 2	Tirada	Dado 1	Dado 2
1	3	4	1	2	3	1	5	3
2	5	4	2	5	6	2	1	6
3	3	6	3	3	6	3	3	4
4	5	5	4	3	3	4	2	2
5	3	5	5	1	4	5	6	3

Qué observar

Dé tiempo para que los alumnos revisen la información de este apartado. Si es necesario explicar la simbología que se está utilizando, puede hacerlo a fin de que se comprenda. Verifique que el alumno puede interpretarlo mediante sus propias palabras.

Cómo enriquecer la actividad

Organice al grupo para que al dar respuesta a cada inciso den sus argumentos. Propicie la participación de todo el grupo.

Puede seleccionar a un equipo para que exponga su experimento y sus resultados, estos serán diferentes de los demás equipos, pero les permitirá conocer cómo lo realizaron y respondieron cada inciso.

Transversalidad

Español

En la clase de Español, es común que los alumnos realicen lecturas de libros, pregunte que de las diferentes lecturas, cuentos, fábulas, acción, intriga, terror ¿cuál es la probabilidad de que un alumno tenga el gusto por alguno o varios géneros literarios? Comente con los alumnos para que juntos obtengan esta probabilidad en el salón de clases.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Cerciórese de que el alumno realiza el experimento de forma adecuada, así como cada respuesta que presenta sea lógica. Recuerde que ahora el dado es en forma de octaedro, a diferencia del dado común que es de forma cúbica.

Verifique que es capaz de realizar nuevos planteamientos y contestarlos de manera correcta.

Cambiando números

Indique al alumno que en el punto 1 agregue los siguientes dos eventos:

c) evento 3: se obtiene un múltiplo de 2,

d) evento 4: se obtiene un número impar mayor que 3.

Cómo enriquecer la actividad

Seleccione a una de las parejas que trabajó esta actividad para que pasen al frente a mostrar sus resultados y, sobre todo sus justificaciones. Esto permitirá una realimentación que beneficiará a todo el grupo.

Pídales que reflexionen qué ocurre si un tercer evento tiene como condición: "se obtiene un múltiplo de 2", y un cuarto evento tiene como condición: "se obtiene un número impar mayor que 3".

Matemáticas 3. Por competencias

b) Comparen sus resultados con los del resto del grupo.

- ¿Consideran que es posible determinar una tendencia o hacer alguna predicción sobre alguna de las tiradas con sólo tener estas tres tablas de resultados? No Expliquen su respuesta. Porque existen más posibilidades.
- Sabiendo que cada dado tiene 6 caras y que el número de puntos se repite, ¿cuál es el espacio muestral al lanzar dos dados 36 ¿cuántas permutaciones se pueden obtener en total? 36
- ¿De qué manera se obtiene este resultado? Multiplicando las 6 opciones de cada uno.

2. Contrasten en grupo sus respuestas y concluyan: ¿cuál es la importancia de realizar un experimento aleatorio y cuál es el propósito de realizar este tipo de estudios?

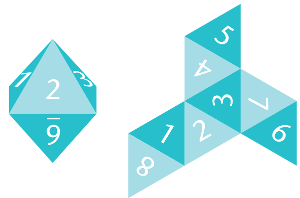
PRACTÍCALO

Actividad 6.4

1. Analicen la situación planteada y al final contrasten sus resultados y conclusiones con los que obtuvieron en la actividad anterior.

Después de tirar un dado puede ocurrir cualquiera de las siguientes condiciones:

Octaedro



a) Evento uno: se obtiene un múltiplo de 3.

b) Evento dos: se obtiene un número par mayor que 4.

- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento tres? P(3) = $\frac{3}{8}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento cuatro? P(4) = $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
- ¿Qué significa que un evento tenga la condición de que ocurra el evento 3 o el 4? Que sean independientes sin afectar su probabilidad de que ocurran.
- Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento tres o cuatro? P(3 o 4) =

2. Al comparar los resultados de la primera situación para los eventos 1 y 2, con la segunda para los eventos 3 y 4.

a) ¿Consideran que hay alguna diferencia en sus resultados y en el tipo de eventos que se tratan? Justifiquen su respuesta. No, porque como son eventos independientes la probabilidad no se ve afectada porque se trata de un solo experimento.

b) Comparen sus resultados con los de otros equipos y, con la asesoría del profesor, determinen:

- ¿Cuál es la conveniencia de analizar en primer lugar la probabilidad independiente de cada uno de los eventos dados en cada situación? Que se puede obtener una probabilidad para todos al realizar la suma: P(AUB) = P(A) + P(B).
- ¿Es posible realizar la suma de las probabilidades de cada uno, si éstos tienen algún elemento en común? Sí
- ¿Qué ocurre si no tienen elementos en común? Que no pertenecen a un conjunto de datos.
- ¿Cuál es el evento que tiene el conector *y*? Que únicamente puede haber una probabilidad de que ocurra.
- ¿Qué diferencia hay al usar *o* y *y* en una condición? Que pueden tener dos probabilidades de que ocurra
- ¿Qué son los eventos compuestos que utilizan los conectores *o* y *y*? Que son mutuamente excluyentes.
- ¿Cuál es la relación que se observa en la relación que hay en la probabilidad de cada uno? Que son independientes, sin embargo, pertenecen al mismo experimento.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

Para tener en cuenta

Los eventos compuestos pueden llevar dos conectores. Si llevan *o* indica que puede pasar cualquiera de ellos, pero sólo uno; en cambio, si llevan *y*, indica que pueden pasar dos o más al mismo tiempo.

PRACTÍCALO **Actividad 6.5**

1. A Luisa le gusta tener sus monedas en un monedero, en la imagen se muestran las monedas que hoy tiene.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar una moneda de 1 peso? $\frac{3}{4}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea de 2 pesos? $\frac{3}{16}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda sea de 5 o de 10 pesos? $\frac{1}{2}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda sea mayor que 1 peso y menor que 10? $\frac{1}{2}$

a) De estos eventos mencionados:

- ¿Algunos son complementarios? Sí

  Explica porqué. El evento dos y el evento cuatro son complementarios, porque pueden ocurrir simultáneamente si cae el número dos.

- ¿Hay condiciones que sean mutuamente excluyentes? Sí

  Explica tu respuesta. El evento uno y el evento cuatro, si ocurre cualquiera de ellos el otro no puede ocurrir.

2. Compara tus resultados con los que obtuvieron algunos de tus compañeros y, con la asesoría de tu profesor, determina las condiciones que permiten saber si dos eventos son mutuamente excluyentes o complementarios.

Para tener en cuenta

Los eventos mutuamente excluyentes son aquellos en los que si un evento sucede, significa que el otro no puede ocurrir.

117

Qué observar

Esta actividad se realizará con monedas de distinta denominación, sin embargo, puede aplicarse si dos eventos son mutuamente excluyentes o si son complementarios, es decir, que se puede aplicar la regla de la suma.

Verifique que cada una de las respuestas sea correcta; si es necesario, guíelos para que de manera clara y precisa hagan la justificación de cada una.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que realicen el experimento con diferentes monedas de distinta denominación, para que sigan ejercitando este tipo de probabilidades. Permita que un alumno sea quien exponga ante el resto del grupo su procedimiento; si es necesario, apóyelo.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta sección permite conocer el avance que ha tenido el alumno durante su trabajo en este bloque. Trabájelo en parejas y observe que el aprendizaje haya quedado claro, de lo contrario, permita que entre todo el grupo aclare las dudas que se presenten.

Cómo enriquecer la actividad

Propicie la participación de todo el grupo para que propongan nuevas situaciones y las resuelvan en casa. Recomiéndeles visitar la página de internet que se sugiere en el libro, para que reafirmen su conocimiento.

LO QUE APRENDÍ

1. Un juego de mesa contiene dos dados y un tablero, para avanzar se lanzan los dados y se suma el número de puntos que se obtengan en su cara superior.
   a) Analicen esta situación y respondan las preguntas.
   - Si se considera como favorable a uno solo de estos eventos, ¿cuál es su probabilidad? $\frac{1}{36}$
   - De todos los posibles resultados, ¿qué eventos propondrían para que se consideren complementarios? Que caigan dos caras con números pares o dos caras con números nones.
   - Expliquen cómo lo determinaron. Buscando dos eventos que al sumar su probabilidad dé 1.
   - Propongan dos eventos que sean complementarios. Que salga un número mayor que 3 o un número par.
   - Expliquen cómo lo realizaron. Ambos eventos pueden ocurrir al mismo tiempo.
   - Diseñen dos eventos que sean mutuamente excluyentes, ¿cuáles serían? Que la suma de ambas caras sea un par o un número impar.

   b) Consideren los siguientes eventos, encuentren sus resultados posibles y determinen la probabilidad de cada uno, tomen en cuenta que se considera cada evento como la suma de los puntos de la cara superior de cada dado.
   - Evento uno: el resultado de la suma es 12.
     Número de resultados posibles: 1 de 36
     Probabilidad de ocurrencia: $\frac{1}{36}$ o bien 0.027, es decir 2.7%.
   - Evento dos: el resultado de la suma es 7.
     Número de resultados posibles: $\frac{6}{36}$ esto es $\frac{1}{36}$
     Probabilidad de ocurrencia: ______.
   - Evento tres: el resultado de la suma es mayor a 10 o menor que 10.
     Número de resultados posibles: $\frac{33}{36}$
     Probabilidad de ocurrencia: 16.6%

   c) Respondan las preguntas:
   - ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar todos los resultados posibles? Es muy conveniente hacer una tabla con las sumas de las dos caras para todos los resultados, esto ilustra muy bien y complementa esta actividad.
   - ¿Cuál de los eventos tiene una probabilidad mayor? Que en la suma salga un número 7.
   - ¿Cuál evento tiene una probabilidad menor? Que en la suma salga un número 2.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

- ¿Alguna de estas condiciones contiene eventos complementarios? Sí

  Expliquen su respuesta. El evento tres es seguro que ocurra con cualquiera de los eventos uno y dos

- ¿Hay alguna condición que muestre eventos que sean mutuamente excluyentes? La condición del evento tres.

  Justifiquen su respuesta. Porque no puede ser que la suma sea al mismo tiempo mayor y menor que 10

2. Comparen sus resultados y respuestas con algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una definición formal para cada uno de los eventos que estudiaron en este contenido.

Desarrolla tus habilidades

1. En equipos, analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

   La señora Alicia vende flores y a cada cliente le gusta obsequiarle una flor sorpresa, para ello tiene una canasta con flores, la condición es que el cliente tome una al azar.

   a) Hoy puso rosas, 4 blancas, 3 amarillas y 6 rojas, además, 2 margaritas.

   - ¿Cuál es el espacio muestral? 15
   - ¿Cuál es la probabilidad de sacar una rosa o una margarita? $\frac{15}{15}$ probabilidad 1, es decir, es seguro que ocurra.
   - ¿Cuál es la probabilidad de sacar una rosa roja o una amarilla? $\frac{2}{15}$
   - ¿Cuál es la probabilidad de sacar una margarita? $\frac{9}{15}$ esto es $\frac{3}{5}$
   - ¿Cómo pueden definir un evento que sea imposible? Que no pueda ocurrir, por ejemplo, sacar una flor azul.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que no salga una margarita? $\frac{13}{15}$
   - ¿Alguno de estos eventos son complementarios? El evento uno Justifiquen su respuesta. Ocurre seguro con cualquier otro.
   - ¿Algunos de estos eventos son mutuamente excluyentes? El tercero Expliquen, ¿por qué ocurre esto? Y el quinto, porque si ocurre uno no puede ocurrir el otro.
   - Diseñen un evento que sea complementario, ¿cuál sería? Se espera que el alumno dibuje un evento complementario.
   - ¿Cómo plantearían dos eventos que sean mutuamente excluyentes? Se espera que diversos ejemplos de eventos mutuamente excluyentes.

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y, con la ayuda del profesor, elaboren una tabla comparativa que muestre los distintos tipos de eventos y las características de la probabilidad de cada uno.

Qué observar

Esta actividad está diseñada para que el alumno muestre las habilidades que ha adquirido a lo largo del trabajo de este bloque.

Determine si se trabaja de manera individual, en parejas o en equipos. Verifique que cada una de las respuestas sea correcta.

Cómo enriquecer la actividad

Siempre será enriquecedor escuchar los procedimientos empleados por los alumnos; quizá resulte repetitivo, sin embargo, es una manera de obtener el conocimiento, o bien fortalecerlo. No deje de insistir en lo necesario que resulta justificar cada una de sus respuestas.

Bitácora pedagógica

Cómo enriquecer la actividad

Siempre que sea necesario, y si el tiempo lo permite, retome los contenidos en los que el alumno no ha alcanzado la competencia esperada.

No se trata de repetir esquemas, sino de buscar otras estrategias que sean congruentes con las formas de aprender de los alumnos y que probablemente difieran de las suyas.

Matemáticas 3. Por competencias

Evaluación tipo PISA

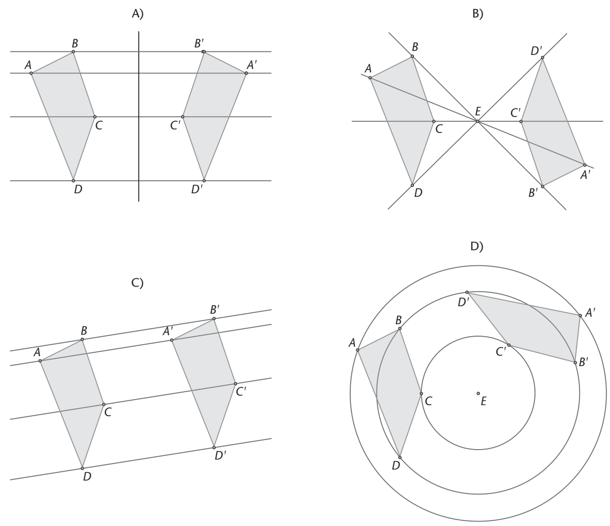
1. Para proteger las botellas de cristal, una empresa las empaqueta en cajas de cartón con base rectangular firme, ésta tiene la misma forma en todas las cajas, independientemente de su tamaño, si el área está dada por una expresión $x^2 + 7x + 12$, ¿qué expresiones algebraicas representan el largo y el ancho de la base?

a) (x-3)(x-4)
b) (x + 3)(x - 4)
c) (x - 3)(x + 4)
d) <u>(x + 3)(x + 4)</u>

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones indica de manera correcta las propiedades de rotación y traslación de una figura? Encierra "sí" o "no", según corresponda.

a) La rotación de una figura se realiza con un giro de 180° sobre su punto de rotación para cada uno de sus vértices.	<u>Sí</u>	No
b) Durante la rotación o traslación de una figura se conservan las medidas de sus lados y sus ángulos.	<u>Sí</u>	No
c) Al trasladar una figura esto equivale a verla reflejada mediante un eje de simetría.	Sí	<u>No</u>
d) Cuando una figura se traslada o se rota, siempre sus lados son paralelos a los de la figura original.	Sí	<u>No</u>

3. Para ilustrar una tarea de matemáticas, Ramiro hizo algunos diseños. Analiza las imágenes y responde las preguntas.



Bitácora pedagógica

BLOQUE 2

Evaluación tipo PISA

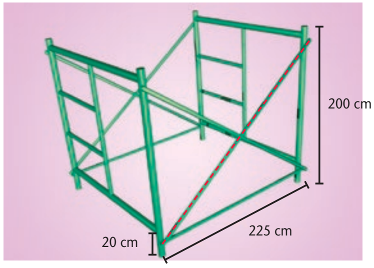
a) ¿En cuál diseño aplicó la simetría central? El inciso b

b) ¿En cuál diseño aplicó la simetría axial? El inciso a

c) Describe cuál es la diferencia entre ambas. La simetría central utiliza un punto y la axial un eje.

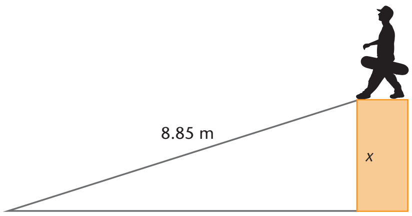
4. El tío de Esteban trabaja en la construcción, el andamio que utiliza se dañó en uno de sus soportes, analiza la imagen y determina las medidas del nuevo soporte que debe comprar.

- a) 295.24 cm
- b) 230.35 cm
- c) 288.14 cm
- d) 300.00 cm



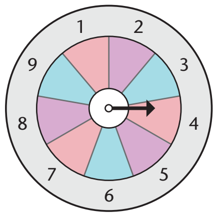
5. Ricardo se va a lanzar por una rampa, analiza la imagen y determina desde qué altura se va a lanzar.

- a) 3.5 m
- b) 2.8 m
- c) 2.6 m
- d) 2.1 m



6. En la feria de su pueblo, Lucía quiere jugar en una ruleta, ¿de qué tipo de evento se trata si ella dice que caerá en un múltiplo de 2 o en un color azul?

- a) Independientes
- b) Excluyentes
- c) Complementarios
- d) Aleatorios



- ¿Cuál es la probabilidad que tiene de ganar?

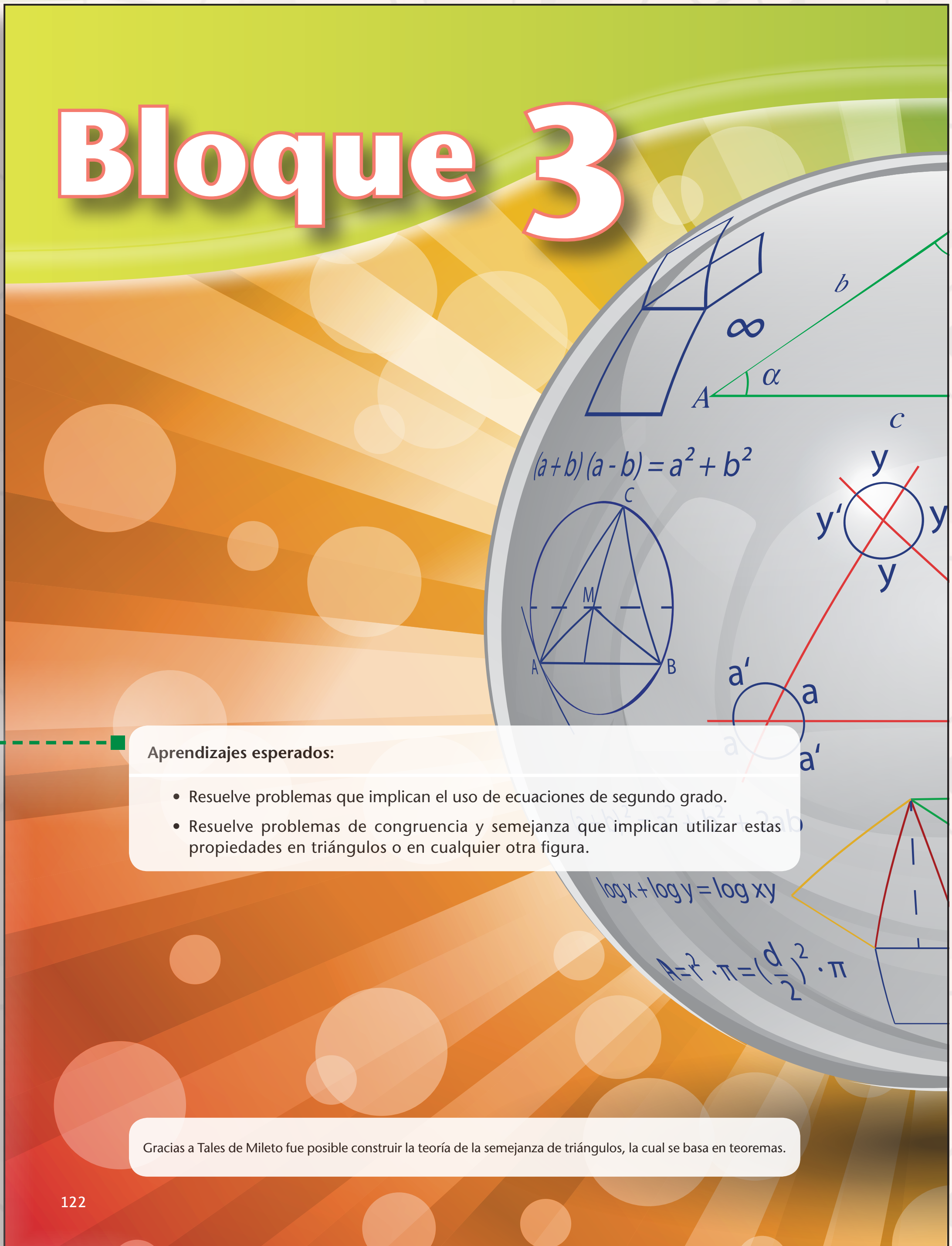
121

Cómo enriquecer la actividad

Dé oportunidad a que los alumnos expongan sus ejercicios, al mismo tiempo sus compañeros deben estar dispuestos a revisar su propio ejercicio y a evaluarse.

Permita el intercambio de ideas y experiencias que apoyen a los alumnos que han cometido algunos errores.

Bitácora pedagógica



Bloque 3

Aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier otra figura.

Gracias a Tales de Mileto fue posible construir la teoría de la semejanza de triángulos, la cual se basa en teoremas.

122

Qué observar

Indique a los alumnos que hagan una lectura de la entrada del bloque; puede ser en silencio.

Pídales que analicen el contenido, que detecten aquellas palabras que desconocen y que señalen el enunciado que les es ajeno.

Contexto histórico

1492
Colón navega rumbo al Caribe y descubre el Nuevo Mundo.

1493
Llega a su cenit el imperio inca, con una extensión de 3 500 km de norte a sur.

1516-17
Los otomanos logran conquistar Siria, Egipto y Arabia.

1519
Fernando de Magallanes cruza el Océano Pacífico.

Hechos matemáticos

1400
Madhava encuentra la forma de la expansión de las series para la *función tangente* inversa, entre otras.

1482
En Venecia, Erhard Ratdolt imprime por primera vez el libro "Elementos de Euclides", para latinos.

1506
Escipión del Ferro descubre un método algebraico para resolver la ecuación reducida del tipo uno de tercer grado.

1530
Copérnico hace aportaciones a la astronomía y a la trigonometría.

$$v = \sqrt{g \cdot l \cdot (1 - \cos(a))/2}$$

123

Cómo enriquecer la actividad

Aproveche la línea del tiempo para que los estudiantes lean y hagan comentarios acerca del desarrollo de las matemáticas.

Formule preguntas para que practiquen el cálculo mental, por ejemplo: ¿hace cuánto tiempo llegó al cenit el imperio Inca?, ¿hace cuánto tiempo realizó Copérnico las aportaciones a la trigonometría?

Pídales que investiguen y presenten una pequeña biografía de algunos personajes relacionados con el desarrollo de las matemáticas.

Qué observar

La actividad **Acuérdate de...** tiene como propósito involucrar al alumno en dos sentidos; el primero, recuperar sus conocimientos sobre traducción de enunciados al lenguaje algebraico, con el fin de resolver problemas y, el segundo, la resolución de problemas que requieren el manejo de modelos algebraicos en los que aparezca un término cuadrático.

Cómo enriquecer la actividad

Permita que comparen sus resultados acerca de la modelación de la expresión cuadrática para esta situación, así como verificar que la expresión tiene la forma $x2 + bx + c = 0$.

Seleccione a uno de los equipos para que explique cómo obtuvo cada uno de los términos y su coeficiente.

Recursos y materiales

En la siguiente página encontrará teoría y ejercicios acerca de la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula general, que le serán de utilidad para enriquecer su clase.

http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/lloret/ecuaciones_cuadraticas.htm

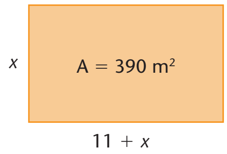
Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido 1	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

ACUÉRDATE DE...

Recuerden las actividades realizadas en los bloques anteriores referentes a ecuaciones cuadráticas, donde utilizaron sus propios procedimientos y la factorización.

1. Analicen la siguiente situación y respondan lo que se les pide.
   a) Un terreno rectangular tiene las siguientes medidas, observen la imagen.



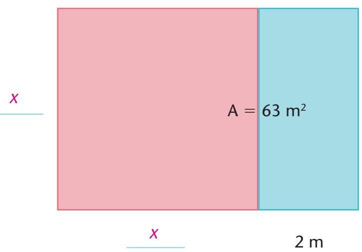
- ¿Cuál es la ecuación que modela la situación? $x^2 + 11x - 390 = 0$
- ¿Qué forma tiene la ecuación? $x^2 + bx + c = 0$
- ¿Cuál es el término de segundo grado o cuadrático? x^2
- ¿Cuál es el término de primer grado o término lineal? $11x$
- ¿Cuál es el término independiente? -390
- ¿Cómo resolvieron la ecuación? Aplicando la fórmula general
- ¿Por qué decidieron utilizar ese método? La fórmula general se utiliza para resolver cualquier operación cuadrática.
- ¿De qué manera hicieron la justificación de sus resultados? Haciendo la sustitución de X en la fórmula original.
- ¿Qué tipo de ecuaciones cuadráticas conocen? Descríbanlas. *Completa* $ax^2 + bx + c = 0$, *Incom.pura* $ax^2 + c = 0$, *Incom.mixta* $ax^2 + bx = 0$

2. Comparen sus resultados con los que obtuvieron otros compañeros y establezcan, ¿cómo es posible determinar la necesidad de utilizar una ecuación cuadrática para resolver alguna situación?

PRACTÍCALO

Actividad 1.1

1. Analicen la siguiente situación y respondan lo que se les indica.
   a) La superficie que ocupaba la cooperativa escolar el año pasado era cuadrada, para este año se le agregó una sección, con lo que quedó convertida en un rectángulo de 63 m². Si el largo del rectángulo es 2 m mayor que su ancho, ¿cuáles son sus dimensiones? Escríbanlas en las líneas de la figura.



- ¿Cuál es la ecuación que modela esta situación? $x^2 + 2x - 63 = 0$ *Incom.mixta* $ax^2 + bx = 0$
- ¿Cómo obtuvieron sus resultados? Encontrando los valores de x
- ¿Qué forma tiene la ecuación? $x^2 + bx + c = 0$

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

- ¿Cuál es el término de segundo grado o cuadrático? x^2

  ¿Y su coeficiente? 1
- ¿Cuál es el término de primer grado o lineal? $2x$

  ¿Y su coeficiente? 2
- ¿Cuál es el término independiente? -63

2. Comparen sus respuestas las de otros otros compañeros y comenten acerca de la finalidad de igualar a cero una ecuación cuadrática.

Para tener en cuenta

Una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$, se puede resolver empleando la **fórmula** general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde, a es el coeficiente del término de segundo grado o cuadrático; b es el coeficiente del término de primer grado o lineal; c es el término independiente.

Glosario

Fórmula. Es una ecuación o regla que relaciona objetos matemáticos o cantidades.

Qué observar

Dé un tiempo prudente para que los alumnos observen y analicen la estructura que tiene la fórmula general y los coeficientes de cada uno de los términos: cuadrático, lineal e independiente.

PRACTÍCALO

Actividad 1.2

1. Resuelvan la siguiente situación aplicando la fórmula general y contesten lo que se les indica.

   a) Si al doble del cuadrado de la edad que tiene un niño, y al triple de esta edad, se añaden 48 años, suman 200 años, ¿qué edad tiene el niño?

   - ¿Cuál es la ecuación cuadrática que modela esta situación? $2x^2 + 3x - 152 = 0$
   - Expliquen cómo la obtuvieron.

     El doble de la edad seria $2x^2$ más el triple de la edad seria $3x$ más 48 es igual a 200.
   - ¿Cuál es el valor de a? $2x^2$ ¿Cuál el de b? $3x$ ¿Y el de c? -152
   - Sustituyan los valores en la fórmula general.

     $a =$ 2 $b =$ 3 $c =$ -152

$$x = \frac{-(\ 3\ ) \pm \sqrt{(\ 3\ )^2 - 4(\ 2\ )(-152)}}{2(\ 2\ )}$$

   - Aplicando la jerarquía de operaciones, ¿cuál se debe realizar primero?
   - Anoten los resultados en la fórmula.

$$x = \frac{-(\ 3\ ) \pm \sqrt{(\ 9\ ) - 4(\ 304\ )}}{(\ 4\ )}$$

   - Continuando con las operaciones tenemos que:

$$x = \frac{-(\ 3\ ) \pm \sqrt{(\ 9\ ) + (1216)}}{(\ 4\ )}$$

   - Por lo tanto:

$$x = \frac{-(\ 3\ ) \pm \sqrt{(1225)}}{(\ 4\ )}$$

Cómo enriquecer la actividad

Cuando vayan siguiendo la estructura de la fórmula general, realice un recorrido por el salón de clases y pida a algunos alumnos que argumenten qué se hizo en cada paso.

Curiosidades, acertijos y más

Proponga la siguiente ecuación para campeones:

Resuelve:

$x2 = x + x - 4$

Bitácora pedagógica

Qué observar

Verifique que cada expresión, para el largo y ancho de la figura, están planteadas de forma correcta, de la misma manera que la expresión cuadrática que modela esta situación. Verifique que el cálculo de la raíz es verídico. Pregunte cuál es el valor de *x* que van a tomar para encontrar el resultado.

Cómo enriquecer la actividad

Permita, si es necesario, el uso de la calculadora para encontrar el valor de la raíz; manejar la tecnología permite agilizar más el trabajo, recuerde que no es lo único.

Recuerde que la práctica de resolución de operaciones sirve para que el alumno mejore su técnica y alcance la automatización.

Reflexión

Sobre la autoestima

La importancia de la autoestima radica en que nos impulsa a actuar, a seguir adelante y nos motiva para perseguir nuestros objetivos.

Matemáticas 3. Por competencias

- Utilicen su calculadora para obtener la raíz cuadrada.

$$x = \frac{-(\ 3\ ) + (\ 35\ )}{(\ 4\ )}$$

- ¿Qué consideras que indica el signo ±, al momento de resolver una ecuación cuadrática?

$$x_1 = \frac{-(\ 3\ ) + (\ 35\ )}{(\ 4\ )}$$

$$x_2 = \frac{-(\ 3\ ) - (\ 35\ )}{(\ 4\ )}$$

- ¿Cuál de las dos raíces es viable para resolver el problema? La raíz positiva

  ¿Por qué? Porque no hay edades negativas.

- En su cuaderno, comprueben que las raíces obtenidas sean correctas.
- Entonces, ¿se podría tomar cualquiera de los valores de *x* como válida para la solución de la situación?

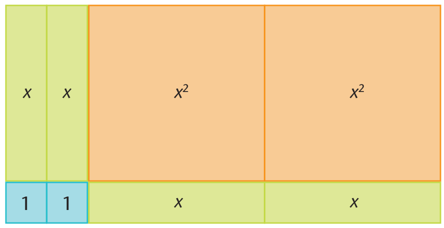
  ¿Por qué? No, porque la edad de las personas no se mide en números negativos.

2. Comparen su secuencia y sus respuestas con las de otros compañeros, comenten si el valor que toman de *x* dependerá de la situación a resolver.

PRACTÍCALO

Actividad 1.3

1. Alberto trazó un plano de una bodega de 72 m^2 y la dividió en secciones, cada una tiene una marca: las x^2 son para almacenar maquinaria, las *x* para papelería y las marcadas con el número 1 para artículos de limpieza.



   - ¿Cómo se expresa la medida del largo? $2x + 2$
   - ¿Cómo se expresa la medida del ancho? $X + 1$
   - Según el plano, ¿cuál es la expresión algebraica que permite encontrar las dimensiones de la bodega? $x^2 + 2x - 35 = 0$
   - Elabora en tu cuaderno las operaciones necesarias para conocer las dimensiones de la bodega.
   - ¿Cuánto mide de largo? 12 ¿Cuánto mide de ancho? 6

     ¿De qué manera es posible demostrar que estos resultados son correctos? Sustituyendo el valor de *x* en la expresión algebraica.

2. Resuelve y comprueba en tu cuaderno las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 - 4x - 12 = 0$ $X_1 = 6,\ X_2 = -2$

   b) $x^2 - 8x + 12 = 0$ $X_1 = 6,\ X_2 = 2$

   c) $x^2 - 3x + 2 = 0$ $X_1 = 2,\ X_2 = 1$

3. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y con la asesoría del profesor determina qué aspectos debes vigilar para poder resolver adecuadamente una ecuación de segundo grado por medio de la fórmula general.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

Para leer más

Discriminante

En la fórmula general, la expresión $b^2 - 4ac$, recibe el nombre de *discriminante de la ecuación*, permite conocer el tipo de raíces que se puede presentar, de esta manera, tenemos:

Si $b^2 - 4ac > 0$, (positivo) la ecuación tiene dos raíces diferentes reales y desiguales.

Si $b^2 - 4ac = 0$, (cero) la ecuación tiene dos raíces reales e iguales.

Si $b^2 - 4ac < 0$, (negativo) la ecuación no tiene raíces, por tanto, no tiene solución.

PRACTÍCALO

Actividad 1.4

1. Continuando con la aplicación de la fórmula general, lean y analicen la siguiente situación, después respondan lo que se les indica.
   a) Sofía es 3 años mayor que su hermano Miguel y el producto de sus edades es 130; determinen qué edad tiene cada uno.
      - Elaboren en su cuaderno un esquema de esta situación.
      - ¿Cuál es la ecuación cuadrática que modela esta situación? $x^2 + 3x - 130 = 0$
      - Cómo se determinan los valores de *a*, *b* y *c*? $ax^2 + bx + x = 0$

        ¿Por qué? Comparando con la formula general de una ecuación cuadrática.
      - ¿Cómo es el discriminante? Positivo
      - ¿Cuántas soluciones tiene esta situación? 2

        ¿Por qué? Porque el discriminante es positivo, tiene dos raíces diferentes reales y desiguales.
      - En su cuaderno, determinen las raíces de esta ecuación empleando la fórmula general.
      - Expliquen de qué manera comprobarían su resultado. Sustituyendo el valor de *x* en la expresión algebraica.
      - Por lo tanto, la edad de Sofía es: 13 años y la edad de Miguel es: 10 años
2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos, propongan un ejercicio donde el discriminante sea cero y otro donde el discriminante sea negativo y expóngalos ante el grupo.

PRACTÍCALO

Actividad 1.5

1. Lean, analicen y contesten lo que se les pide en la siguiente situación.
   a) La suma de las edades de dos hermanas es de 27 años y el producto de sus edades es 180 años, ¿qué edad tiene cada una?
      - Realicen en su cuaderno un esquema que determine esta situación.
      - ¿Cuál es la ecuación que modela esta situación y la resuelve? $x^2 - 27x + 180 = 0$
      - ¿Cuántas soluciones tiene? ____________

Qué observar

Dé un tiempo razonable para que los alumnos lean y analicen el contenido de este apartado, que lo expresen con sus propias palabras para verificar que lo entienden; si es necesario, intervenga pero solo de manera pasiva.

Cómo enriquecer la actividad

Cada nueva resolución es una oportunidad más para consolidar procedimientos propios; es importante que un equipo resuelva y exponga la situación que se plantea, esto les irá dando más seguridad y confianza.

Bitácora pedagógica

____

Transversalidad

Ciencias 2, Física

Comente a sus alumnos que en la Física, como ciencia donde se aplican las matemáticas para comprender y estudiar fenómenos, tiene como objeto la aplicación de muchas herramientas; en el caso de las ecuaciones de segundo grado se pueden aplicar en el lanzamiento de proyectiles, los cuales describen una parábola.

Qué observar

El propósito de esta actividad es que el alumno encuentre tanto las dos raíces como el discriminante, observe que la demostración de los valores de x lo realiza de manera correcta. Recuerde que la demostración permitirá resolver errores que se hayan presentado durante la realización de las operaciones.

Cómo enriquecer la actividad

Seleccione a tres alumnos para que pasen al pizarrón y muestren sus resultados y sus argumentos.

Pídales que expliquen por qué una de las raíces no es tomada en cuenta en la demostración y cómo afecta al resultado.

Recursos y materiales

En la página de *Recusostic*, encontrará teoría y un interactivo que le permitirá reforzar el tema de la resolución de ecuaciones de segundo grado o cuadráticas por medio de la fórmula general con los alumnos.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuaciones_de_segundo_grado/segundo_grado.html

Matemáticas 3. Por competencias

- Expliquen de manera breve, ¿cómo encontraron los valores de la edad de cada hermana? Se plantea $\begin{cases} x + y = 27 \\ (x)(y) = 180 \end{cases}$ se despeja y de la ecuación 1 y queda $y = 27 - x$ al sustituir en la segunda ecuación queda $(x)(27 - x) = 180$, al simplificar queda $x^2 - 27 + 180 = 0$
- Si tuviera dos raíces, ¿cuál tomarían en cuenta? En este caso se toman las dos.

  ¿Por qué? Porque ambas raíces corresponden a las edades de las hermanas.

- Expliquen cómo comprobarían que su respuesta es verdadera.

2. Comparen sus resultados los de otros compañeros y con la supervisión de su profesor expliquen al grupo cuál es la estrategia que emplearon para plantear adecuadamente esta situación.

PRACTÍCALO

Actividad 1.6

1. Encuentra los valores de *x* para las siguientes ecuaciones cuadráticas. Realiza el desarrollo en tu cuaderno.

	Ecuación cuadrática	Discriminante	Tipo de las raíces	Valores de las raíces
a)	$x^2 + 12x - 32 = 0$	$(12)^2 - 4(1)(32)$	Reales y desiguales	x_1 = 2.24 x_2 = −14.24
b)	$3w^2 + 17w + 10 = 0$	$(17)^2 - 4(1)(10)$	Reales y desiguales	w_1 = −0.6 w_2 = −5
c)	$3x^2 - 5x - 2 = 0$	$(-5)^2 - 4(1)(-2)$	Reales y desiguales	x_1 = 2 x_2 = −0.3
d)	$x^2 + 14x + 49 = 0$	$(14)^2 - 4(1)(49)$	Reales e iguales	x_1 = −7 x_2 = −7
e)	$6t^2 - 4t + 32 = 0$	$(-4)^2 - 4(6)(32)$	Imaginarias	t_1 = No tiene raíces t_2 =
f)	$z(z - 9) + 9(z - 9) = 0$	$(0)^2 - 4(1)(-81)$	Reales y desiguales	z_1 = 9 z_2 = −9
g)	$y^2 + 4y - 45 = 0$	$(4)^2 - 4(1)(-45)$	Reales y desiguales	y_1 = 5 y_2 = −9
h)	$x^2 + 22x + 121 = 0$	$(22)^2 - 4(1)(121)$	Reales e iguales	x_1 = −11 x_2 = −11
i)	$2k^2 + 6k - 2 = 0$	$(6)^2 - 4(2)(-2)$	Reales y desiguales	k_1 = 0.302 k_2 = −3.302
j)	$v(v - 10) - 11(v - 10) = 0$	$(-21)^2 - 4(1)(110)$	Reales y desiguales	v_1 = 11 v_2 = 10

- ¿Cuántas ecuaciones tuvieron dos soluciones? 7
- ¿Cuántas presentaron una sola solución? 2
- ¿Cuántas no tuvieron solución? 1
- ¿Resolviste todas las ecuaciones para encontrar las que no tuvieron solución? No

  ¿Por qué? Porque las que tienen discriminante negativo no tienen solución, no es necesario resolverlas para darse cuenta.

Bitácora pedagógica

- ¿Consideras que todas estas ecuaciones permiten modelar alguna situación? Sí
  Justifica tu respuesta. Aunque no tengan solución permiten modelar una situación.
- Selecciona una de ellas y diseña una situación que la modele.
  Ejemplo, inciso g "El largo de un rectángulo es 4u mayor que su ancho y la superficie es de 45 u^2".

2. Compara tus respuestas y resultados con los de otros compañeros y verifica que tus demostraciones son correctas.

LO QUE APRENDÍ

1. Pablo tenía la idea de construir una alberca cuadrada, pero al final decidió agregar 4 m en la base y en el lado opuesto, y a los otros dos lados 1.5 m a cada uno, el área del rectángulo excede a la del cuadrado en 222 cm^2. Calculen la longitud de los lados de la alberca resultante.
   - Elaboren en su cuaderno un esquema que represente la situación.
   - ¿Cuál es la expresión matemática que modela esta situación? $(x + 7)(x + 4) = x^2 + 222$
   - Expliquen cómo la obtuvieron. Se construye un esquema con las dimensiones, a partir de ahí se pueden determinar las expresiones algebraicas que representan la base y la altura del rectángulo.
   - ¿Cómo es el discriminante? No se resuelve por fórmula general, por lo tanto no hay discriminante.
   - De las dos soluciones, ¿cuál eligieron? Solo hay una solución
     ¿Por qué? Porque los términos de segundo grado se reducen a cero y se resuelve una ecuación de primer grado.
2. Comparen sus respuestas y su solución con otros compañeros, comenten si existe otra forma para comprobar que son correctas.

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos y resuelvan el siguiente problema.
   a) Para el desfile del 20 de noviembre participaron 180 estudiantes de una escuela, si el número de estudiantes de cada fila es de 8 más que el número de filas que hay:
   - ¿Cuántas filas y cuántos estudiantes hay en cada fila?
     Hay 10 filas y 18 alumnos en cada fila.
   - ¿Cómo es el discriminante? Positivo
   - Por tanto, el valor del largo es: 18
     Y el valor del ancho: 8
   - ¿El área resultó ser el doble? No
     ¿Por qué? Porque 18 no es el doble de 10.
2. Comparen sus respuestas con las del grupo y comenten cómo expresarían una ecuación en donde, en lugar de aumentar las dimensiones de una figura rectangular éstas tuvieran una disminución.

USA LAS TIC

En la siguiente página web http://es.ncalculators.com/algebra/quadratic-equation-calculadora.htm (Consultada el día 11 de octubre de 2012, a las 14:36 horas), encontrarás una calculadora que resuelve ecuaciones cuadráticas de todo tipo, puedes utilizarla para comprobar tus resultados, después de tu visita es conveniente que comentes con tu profesor tu experiencia y que determines, ¿cuál es la ventaja de contar con este recurso tecnológico?

Qué observar

En esta situación observe como los alumnos trabajan cuando no se presenta el término lineal, solo el cuadrático y el término independiente.

Cómo enriquecer la actividad

Prepare al grupo para que todos participen en la resolución y argumenten en sus resultados, de esta manera habrá una realimentación por parte de los alumnos.

Curiosidades, acertijos y más

La ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y su solución, tiene su origen desde la antigüedad. Los babilonios utilizaron algoritmos para su resolución. En la antigua Grecia fue desarrollada por el matemático Diofanto de Alejandría en el siglo III.

La solución de este tipo de ecuaciones fue introducida a Europa por el matemático judío-español Abraham bar Hiyya (1065-1136).

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 2	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

Qué observar

Aproveche la actividad **Acuérdate de...** para que los alumnos recuerden los criterios de congruencia de triángulos, para que en lo sucesivo los pueda aplicar en diferentes situaciones. De momento, deje que en parejas resuelvan la situación que se les presenta.

ACUÉRDATE DE...

En el bloque 1, contenido 2, revisaron los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, así como sus propiedades.

1. Analicen la siguiente situación y respondan lo que se les indica.
   a) Tracen en su cuaderno dos triángulos, uno cuyos lados midan 3 cm, 5 cm y 6 cm, y el otro cuyos lados midan 6 cm, 10 cm y 12 cm.
      - Denoten los vértices del primer triángulo como *ABC* y al segundo triángulo como *A'B'C'*.
      - ¿Cómo son entre sí los lados de ambos triángulos? Proporcionales
      - ¿Cómo son sus ángulos internos? Iguales
      - ¿Qué criterio para la semejanza de triángulos emplearon? Lados proporcionales

        ¿Por qué? Porque ya se conocen las medidas de estos y se puede establecer si hay o no proporcione entre ellos.
   b) Construyan en su cuaderno un triángulo del cual uno de sus lados mida 8 cm y su ángulo 60°; en el otro triángulo el lado mide 4 cm y el ángulo 60°.
      - Denoten cada uno de los vértices de ambos triángulos.
      - ¿Pudieron construirlo? No ¿Por qué? Falta conocer la longitud del otro lado adyacente al ángulo de 60°.
2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y repasen nuevamente los criterios para la congruencia de triángulos.

Recursos y materiales

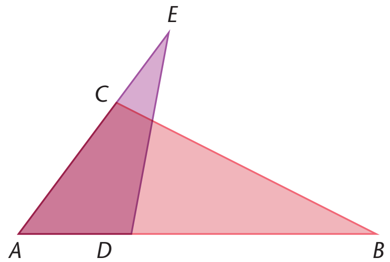
En la página *Sector Matemática*, en su apartado de Semejanza de figuras planas, encontrará diversas actividades relacionadas con el tema que le permitirán enriquecer su clase.

http://www.sectormatematica.cl/geometria2.htm

PRACTÍCALO

Actividad 2.1

1. Observen la siguiente figura, analícenla y contesten lo que se les indica.
   a) El $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. Calculen los valores de *AC* y *BC*, sabiendo que $AE = 7$ cm; $AB = 9.4$ cm; $AD = 3.8$ cm y DE = 4.8 cm.



Bitácora pedagógica

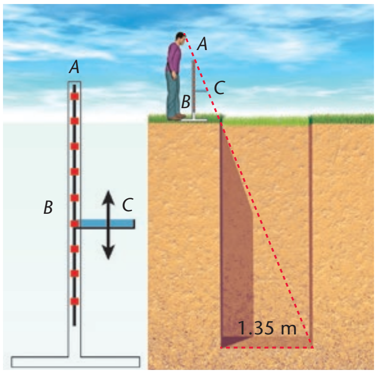
- Expliquen cómo encontraron el valor de AC. Estableciendo la proporción tenemos que $\overline{AC} = \frac{(3.8)(9.4)}{7}$
- Expliquen cómo encontraron el valor de BC. Estableciendo la proporción tenemos que $\overline{BC} = \frac{(4.8)(9.4)}{7}$
- ¿Cómo quedaría la expresión para este cálculo? Queda $\overline{AC} = \frac{(3.8)(9.4)}{7} = 5.10$ y $\overline{BC} = \frac{(4.8)(9.4)}{7} = 6.44$

2. Comparen sus respuestas con otros compañeros y comenten en qué cuestiones de la vida cotidiana se pueden aplicar estos criterios.

PRACTÍCALO

Actividad 2.2

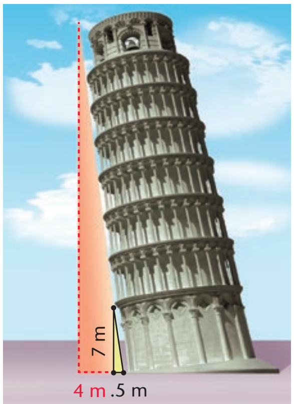
Las aplicaciones de la semejanza de triángulos tienen muchos usos. En pareja resuelvan las siguientes situaciones y respondan lo que se les pide.



1. Se pretende medir la profundidad de un pozo con un instrumento como el de la figura: su base mide 27 cm y su altura 36 cm. Si el diámetro del pozo es de 1.35 m, ¿qué profundidad tiene? 3.6 metros
   - ¿Cuál es la expresión matemática que les permite encontrar el resultado? $\frac{36}{13.5} = \frac{x}{135}$
   - ¿Los triángulos que se forman, son congruentes o semejantes? Semejantes

     ¿Por qué? Tienen la misma forma, pero diferente tamaño.
   - En qué unidades de longitud expresaron su resultado, si tenemos que el instrumento tiene las unidades en centímetros y el diámetro del pozo en metros. En metros

     ¿Por qué? Al hacer operaciones es conveniente manejar 135 cm en lugar de 1.35 m pero al expresar el resultado es conveniente volver a convertir los cm a metros.
   - ¿Cuál es la profundidad del pozo? 3.6 m



2. En la Torre de Pisa se colocaron dos plomadas, como las mostradas en la imagen. Tomando dichos datos como base, respondan, ¿qué altura tiene la torre?
   - ¿Cuál es la expresión matemática que les permite encontrar el resultado? $\frac{x}{4.5} = \frac{7}{0.5}$
   - ¿Los triángulos que se forman, son congruentes o semejantes? Semejantes

     ¿Por qué? Tienen la misma forma, pero distinto tamaño.
   - Con la misma proyección de sombra de la torre, si desde una altura de 28 m se lanzara una nueva plomada y ésta quedara a 2 m de la base, ¿obtendríamos la misma altura para la torre? No

     ¿Por qué? Si se usa la misma sombra desde 28 m y se restan dos nos da los 15.75 m de la altura de la torre.

Cómo enriquecer la actividad

La exposición de las estrategias de cada alumno resulta importante, tome en cuenta sus comentarios y cuestiónelos, o permita que los alumnos se cuestionen entre sí para obtener conclusiones.

Qué observar

Verifique que la proporción es correcta, así como el planteamiento que realizaron para obtener el resultado. Cerciórese de que los argumentos a sus respuestas están basados de manera sólida.

Bitácora pedagógica

Cómo enriquecer la actividad

Seleccione a tres parejas diferentes para que expongan sus resultados y respondan los cuestionamientos de los demás integrantes del grupo; de ser necesario, intervenga cuando observe que no puedan responder o permita que otras parejas den la respuesta.

Qué observar

Observe que interpreten de manera correcta la simbología que se presenta, intervenga para su explicación.

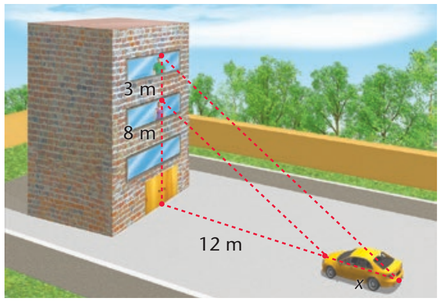
Reflexión

Es importante la participación y exposición de los alumnos; sin embargo, en ocasiones el tiempo es enemigo de este tipo de trabajo, pero a la larga el aprendizaje que se alcanza es más sólido y efectivo.

A partir de la exposición, es importante que las conclusiones de todos los alumnos sean equivalentes, aunque no utilicen las mismas palabras.

Matemáticas 3. Por competencias

3. Dos personas ven un auto deportivo desde su ventana. La primera, a una altura de 8 m, ve la parte delantera; la segunda, 3 m más arriba, observa la parte trasera del auto. La línea visual de ambos tiene la misma pendiente. Si el frente del auto está a 12 m de la pared, ¿cuál es el largo del auto? 4.5 metros



   - ¿Cuál es la expresión matemática que representa esta situación? $\frac{12}{x} = \frac{8}{3}$
   - ¿Los triángulos formados son semejantes o congruentes? Semejantes
     ¿Por qué? Tienen la misma forma pero distinto tamaño.
   - ¿Cuál es la longitud del auto? 4.5 m
   - Si ahora otra persona está a 4 m de altura y ve la parte de enfrente, mientras una segunda persona está 2 m más arriba y ve la parte trasera, cuando el auto está a 9 m de distancia del edificio, ¿cuál es la longitud del auto? 4.5 m ¿Por qué? Como se trata del mismo auto su longitud no puede cambiar.

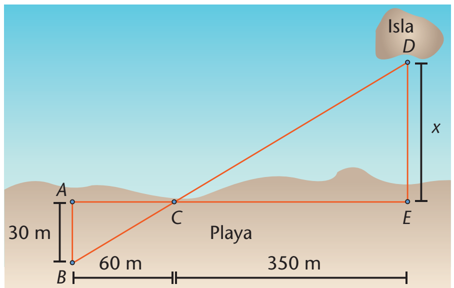
4. Comparen sus respuestas y procedimientos y, a manera de repaso, mencionen las diferencias entre semejanza y congruencia.

PRACTÍCALO

Actividad 2.3

1. Observa detenidamente la siguiente imagen y considerando lo que se indica, responde.

   a) Si $\overline{AB} \perp \overline{AE}$ y $\overline{DE} \perp \overline{AE}$. ¿A qué distancia se encuentra la isla de la orilla de la playa?



   - ¿Cuál es la expresión matemática que permite calcular la distancia? $\frac{30}{60} = \frac{x}{350}$
   - ¿Qué relación guardan los triángulos entre sí?
     ¿Por qué? Son semejantes, porque tienen la misma forma pero distinto tamaño.
   - ¿A qué distancia de la playa está la isla? 175 m
   - Si $\overline{BC}$ = 67.08 m, ¿a qué distancia se encuentra la isla desde el punto *C*? 391.3 m
   - Explica brevemente cómo encontraste el resultado. Se establece una proporción con los lados conocidos, esta puede ser $\frac{50}{67.08} = \frac{350}{y}$ (asignando "y" como la distancia entre el punto C y el punto D de la isla).
   - ¿Cuál es la expresión para esta nueva situación? $y = \frac{(67.08)(350)}{60}$

2. Compara tus respuestas y resultados con los de otros compañeros, y con la asesoría de tu profesor explica cuál es la importancia de conocer este procedimiento al aplicarlo en la vida real para el cálculo de distancias inaccesibles.

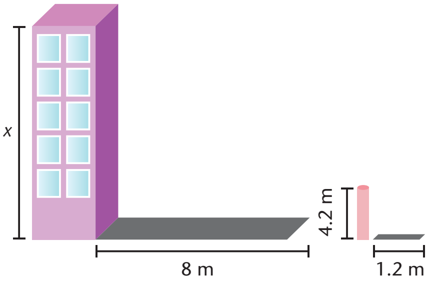
Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

LO QUE APRENDÍ

1. Un edificio proyecta una sombra de 8 m a la misma hora que un poste de luz de 4.2 m de altura proyecta una sombra de 1.2 m, ¿cuál es la altura del edificio?

   28 metros

   - Explica cómo plantearías la solución.

     Estableciendo la proporción $\frac{x}{8} = \frac{4.2}{1.2}$

   - ¿Cómo son entre sí los triángulos que se forman, semejantes o congruentes? Semejantes

     Justifica tu respuesta. Por los datos se sabe que sus lados son proporcionales, además ambos forman un ángulo recto entre los datos dados.

   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? $x = \frac{(8)(4.2)}{1.2}$
   - Por tanto, ¿cuál es la altura del edificio? 28 m

2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros y comenten de qué manera se puede realizar la demostración para saber que su resultado es el correcto.

Desarrolla tus habilidades

1. Bajo la supervisión de su profesor, reúnanse en equipos y lleven a cabo la siguiente actividad en el patio de la escuela.
   a) Dividan el equipo en dos.
      - Consigan una vara o un palo y midan su longitud.
      - Encuentren el momento ideal para que exista una proyección de sombra, intenten que sea antes del mediodía.
      - La primera parte del equipo deberá poner el objeto que eligieron en forma perpendicular al piso y medir la sombra que proyecta.

   b) La segunda mitad del equipo seleccionará una de las siguientes opciones: el asta bandera, un árbol, el edificio de los salones.
      - Medirán la sombra que proyecta.

   c) Con los datos obtenidos reproduzcan en su cuaderno un esquema de cómo quedó planteada la situación.

   d) ¿Cuál es la expresión matemática que permite calcular la altura de los objetos que eligieron? La respuesta dependerá del objeto que se eligió.

      Por lo tanto, la altura del objeto es de: Depende de las medidas

2. Comenten sus respuestas con otros equipos que eligieron objetos diferentes para realizar la actividad.

USA LAS TIC

En la siguiente página http://www.thatquiz.org/tq/previewtest?C/K/I/P/38351332292361 (Consultada el día 31 de octubre de 2012 a las 14:36 horas), encontrarás un interactivo con preguntas en línea, es conveniente que las resuelvas para valorar tus conocimientos adquiridos, después de tu visita comenta tus resultados con tu profesor, él te podrá dar alguna sugerencia o consejo para mejorar tus habilidades.

Qué observar

Esta actividad permite que los alumnos pongan en práctica lo que han aprendido en este contenido, cerciórese de que realizan los planteamientos y justificaciones de cada una de sus respuestas de manera objetiva.

Cómo enriquecer la actividad

El alumno debe deducir con cierta facilidad que los triángulos son congruentes, sin embargo, es necesario que reconozcan en éste y en otros casos cuál es el criterio de congruencia que se está considerando.

Recursos y materiales

Ciencias 2, Física

Comente a los alumnos que este tema es una herramienta que aplicaron en Ciencias 2, Física en el tema de cálculo de altura o profundidades, en la caída libre de los cuerpos o en acústica.

Pida a los alumnos que expliquen la forma en que lo aplicaron.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Observe la forma en la que los alumnos indican el orden de comparación que están llevando a cabo.

Recursos y materiales

En la página de recursos *tic Educación*, encontrará teoría y ejercicios que le permitirán introducir al alumno a este tema; si es necesario, tome algunos ejemplos para realizar una evaluación al final.

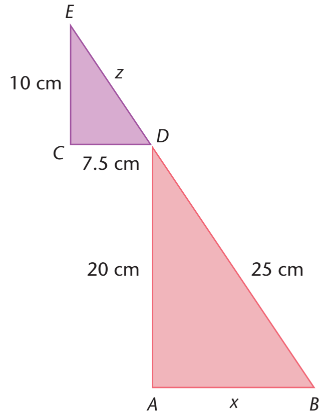
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena7/2esoquincena7.pdf

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 3	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

ACUÉRDATE DE...

En el contenido anterior estudiaste los criterios de congruencia y semejanza, ahora conocerás una variante de ellos.

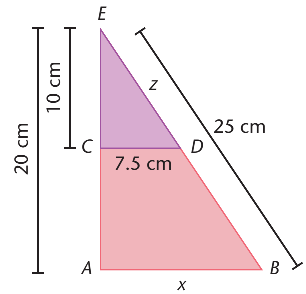
1. Lee con atención la siguiente situación y responde.



a) De acuerdo con los datos de la siguiente figura y sabiendo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, ¿cuál es la medida de x y z? $x = 15$ y $z = 12.5$

- ¿Cuál es la proporción que empleaste para encontrar el valor de x? $\frac{10}{7.5} = \frac{20}{x}$ ¿Por qué? Por los datos dados es la proporción más adecuada.
- ¿Cuál es el valor de x? $x = 15$
- ¿Cuál es la proporción que empleaste para encontrar el valor de z? $\frac{10}{20} = \frac{z}{25}$ ¿Por qué? Por los datos dados es la proporción más adecuada.
- ¿Cuál es el valor de z? $z = 12.5$

b) Si desplazaras el $\Delta\,CDE$ sobre el segmento BD, quedaría de la siguiente manera.



Con esta misma figura, ¿se pueden calcular los valores de x y de z? Sí ¿Por qué? Porque ni los triángulos ni las dimensiones cambian.

- ¿La razón empleada para los cálculos será la misma? Sí ¿Por qué? Porque ni los triángulos ni las dimensiones cambian.
- ¿Qué diferencias hay entre la figura anterior y ésta? Sí, los triángulos están superpuestos pero esto no altera ninguna de sus condiciones.

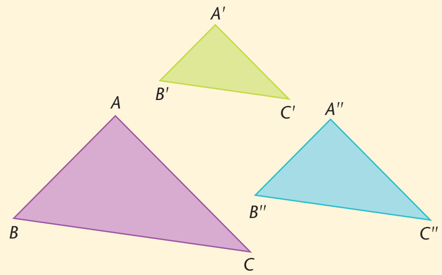
2. Compara tus respuestas con las de otros compañeros y comenten acerca de la semejanza de los triángulos que se presentan.

Para leer más

En un grupo de triángulos semejantes, la razón entre las medidas de lados de un triángulo es igual a la razón entre las medidas de los dos lados correspondientes de cada uno de los otros triángulos.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3



$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A''C''}}$$

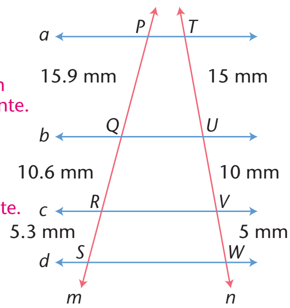
$$r = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A''B''}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B''C''}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A''C''}}$$

PRACTÍCALO

Actividad 3.1

1. Observen que en la siguiente figura las rectas *a*, *b*, *c*, y *d* son paralelas y las rectas *m* y *n* son transversales que cortan el haz de paralelas.

> **Glosario**
> **Razón.** Es una relación entre dos medidas.



   a) Tomando como referencia dichas rectas y las medidas que se muestran, respondan las siguientes preguntas.
      - ¿Cuál es la **razón** de $\overline{TU}$ en relación con $\overline{UV}$? La que se establece con $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ respectivamente.
      - ¿Cuál es la razón de $\overline{PQ}$ en relación con $\overline{QR}$? La que se establece con $\overline{TU}$ y $\overline{UV}$ respectivamente.
        ¿Por qué? Estos segmentos son correspondientes.
      - ¿Cuál es la razón de $\overline{PQ}$ en relación con $\overline{RS}$? La que se establece con $\overline{TU}$ y $\overline{VW}$ respectivamente.
      - ¿Por qué? Estos segmentos son correspondientes.
      - ¿Cuál es la razón de $\overline{TU}$ en relación con $\overline{VW}$? La que se establece con $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ respectivamente.
        ¿Por qué? Estos segmentos son correspondientes.

   b) Son proporcionales los segmentos que se forman en cada una de las rectas *m* y *n*? Si
      Justifiquen su repuesta. Todos los segmentos formados por las transversales son proporcionales entre sí debido a que cortan rectas paralelas.
      - Tracen un segmento de recta, desde *a* hasta *d*, que mida 6 cm. Midan cada uno de los segmentos que se forman entre las paralelas y respondan.
      - ¿Mantienen estos segmentos la misma proporcionalidad que los segmentos de las rectas *m* y *n*? No
        Justifiquen su respuesta. Sus dimensiones no son las mismas, sin embargo, siguen manteniendo una relación proporcional, pero no es la misma con respecto a cada segmento *m* y *n*.

2. Comparen sus respuestas con las de sus demás compañeros y concluyan, cómo son entre sí los segmentos que forman las transversales al cortar dos o más rectas paralelas.

135

Qué observar

La actividad 3.1 es el preámbulo para que el alumno no tenga dificultades en el momento de establecer las razones entre los segmentos de las secantes comprendidos entre las rectas paralelas, y esté en posibilidad de resolver la actividad 3.2, la cual ya viene hacer una forma de utilizar el teorema de Tales.

Cómo enriquecer la actividad

La dificultad que se les presenta a los alumnos es la identificación de partes específicas de esta figura; se le sugiere que las reproduzcan en el pizarrón, y que utilizando colores diferentes se conteste cada una de las preguntas.

Curiosidades, acertijos y más

David dejo como herencia un terreno triangular para sus cuatro hijos. La única condición que les dejó es que cada uno recibiera una cuarta parte del área total y su porción de tierra también fuera triangular. ¿Cómo tendrán que dividir el terreno?

Bitácora pedagógica

Qué observar

Verifique que el trazo, tanto de los extremos de ambas figuras como de los segmentos que se piden, los realice de manera correcta, pídales que utilicen una regla para tener un mejor control de sus trazos.

En la tabla se anotarán las medidas de cada segmento, éstas pueden variar, verifique que esta variación no sea muy grande.

Qué observar

La trisección de un segmento cualquiera fue un problema que Euclides no pudo resolver; sin embargo, utilizando la idea de Tales, cualquier segmento puede dividirse en un número *n* de partes iguales. Con ese mismo principio, debe quedarle claro al alumno que cualquier segmento puede dividirse en *n* partes proporcionales, lo importante es utilizar de manera adecuada un haz de paralelas que comprenda el segmento en cuestión concurrente con una línea recta cualquiera.

Reflexión

Sobre la socialización

"La socialización solo se presenta cuando la coexistencia aislada de los individuos adopta formas determinantes de cooperación y colaboración que caen bajo el concepto general de la acción recíproca."

Georg Simmel.

Matemáticas 3. Por competencias

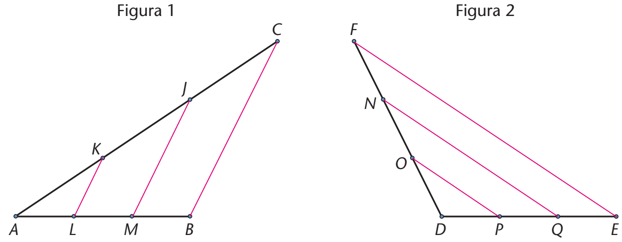
PRACTÍCALO — Actividad 3.2

El **teorema** de Tales también se puede aplicar a dos rectas que convergen en un vértice, observen las figuras.

1. Realicen los trazos indicados y respondan las preguntas.

Glosario
Teorema. Es una proposición cuya verdad es demostrable.

Figura 1 Figura 2



a) Tracen una recta que una los extremos de ambas figuras.

b) Tracen líneas paralelas entre los segmentos indicados.

c) Con una regla tomen las medidas de dos segmentos de cada figura, los que crean más convenientes y utilicen el teorema de Tales para encontrar los valores faltantes.

d) Registren las medidas de los segmentos en la tabla.

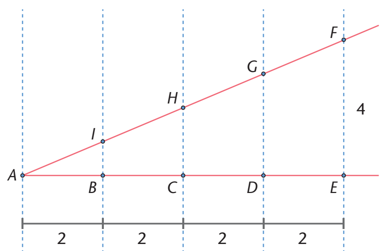
$\overline{AK}$ = 2	$\overline{KJ}$ = 2	$\overline{JC}$ = 2	$\overline{AL}$ = 1.1	$\overline{LM}$ = 1.1
$\overline{MB}$ = 1.2	$\overline{DO}$ = 1.2	$\overline{ON}$ = 1.2	$\overline{NF}$ = 1.2	$\overline{DP}$ = 1.1
$\overline{PQ}$ = 1.2	$\overline{QE}$ = 1.1	$\overline{AJ}$ = 4	$\overline{DN}$ = 2.4	$\overline{FE}$ = 6
$\overline{CB}$ = 3.6	$\overline{NQ}$ = 4	$\overline{KL}$ = 1.2	$\overline{OP}$ = 2	

- Expliquen la estrategia que utilizaron para resolver esta actividad. Depende de las medidas que tomen los alumnos, se espera que las tomas realizadas den medidas muy aproximadas y que los alumnos establezcan proporciones entre ellas.
- Expliquen de qué manera comprobaron que sus resultados son correctos. Se espera que los alumnos concluyan que la relación entre los segmentos dependen de la posición de las líneas paralelas.

2. Comparen sus respuestas con las de algún equipo cercano y con la ayuda del profesor expliquen, ¿cuál es la manera más sencilla de aplicar el teorema de Tales cuando se tienen que encontrar varias medidas en una sola figura?

PRACTÍCALO — Actividad 3.3

1. En la siguiente figura se muestran líneas paralelas que miden dos unidades de separación entre cada una de ellas. Analízala y encuentra la medida de los segmentos $\overline{BI}$, $\overline{CH}$ y $\overline{DG}$.



- Escribe y justifica tu planteamiento para encontrar el valor del $\overline{BI}$. Se considera el triángulo ABI y el triángulo AEF, con esto se puede establecer la proporción.

$\frac{4}{8} = \frac{BI}{AB}$ Esto es $\frac{4}{8} = \frac{BI}{2}$ queda $BI = \frac{(4)(2)}{8} = \frac{8}{8}$

- Por tanto, ¿cuál es el valor del $\overline{BI}$? ______

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

- Escribe y justifica tu planeamiento para encontrar el valor del $\overline{CH}$.

  Se considera el triángulo ABI y el triángulo AEF, con esto se puede establecer la proporción.

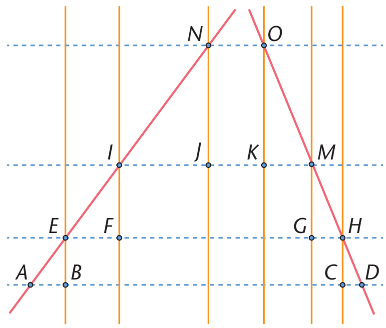
  $\frac{4}{8} = \frac{CH}{AC}$ Esto es $\frac{4}{8} = \frac{BI}{4}$ queda $BI = \frac{(4)(4)}{8} = \frac{16}{8} = 2$

- ¿Será el mismo planteamiento para encontrar el valor del $\overline{DG}$?

  ¿Por qué? Solo cambian las dimensiones, pero el planteamiento es el mismo.

- Si se sabe que el $\overline{AF}$ mide 9 cm, ¿cuánto mide $\overline{HG}$? 2.23
- Explica cómo obtuviste el resultado. Si se divide el segmento en 4 partes se obtiene 2.25, pero esta medida es aproximada; si se calcula el segmento AE y el segmento AH y luego se obtiene la diferencia entre ellos, se obtiene la medida exacta.
- Por tanto, el $\overline{AG}$ mide: 6.7 y el $\overline{AH}$ mide: 4.47

2. Observa la siguiente figura y contesta lo que se te pide.



- Encuentra al menos un par de triángulos que sean semejantes.

  ΔIJN, ΔEFI, ΔABE, ΔKMO, ΔGHM y ΔCDH

- Explica por qué resultan semejantes esos dos triángulos.

  Porque tienen la misma forma, pero distintas dimensiones, además guardan una relación proporcional.

- ¿Cuáles lados resultan proporcionales en el par de triángulos que encontraron? Depende del alumno
- Si $\overline{BE} = 3$ cm; $\overline{FI} = 5$ cm; $\overline{JN} = 8$ cm; $\overline{AN} = 20$ cm y $\overline{OD} = 18$ cm, encuentra la medida de los $\overline{AE}$; $\overline{EI}$ y $\overline{OM}$.

  AE = 3.75 EI = 6.25 OM = 9

- Si $\overline{IJ} = 6$ cm, ¿cuánto miden los lados del Δ *EFI*? AE = 5 EI = 6.25 EF = 3.75

3. Compara tus respuestas y resultados con los de otros compañeros, y con la asesoría de tu profesor verifica que tus respuestas y procedimientos sean correctos.

Qué observar

Una vez que el alumno tenga claras las razones entre los segmentos de las secantes, está en posibilidad de resolver sin ninguna dificultad esta actividad.

Observe la justificación de cada una de sus respuestas.

Cómo enriquecer la actividad

Para esta actividad, dé la oportunidad a los alumnos de hacer diversos ensayos, que sean ellos quienes descubran la forma de utilizar un par de paralelas para dividir un segmento en partes iguales o en partes proporcionales. Que comparen sus respuestas con sus compañeros y lleguen a una conclusión en cuanto a esta aplicación del teorema de semejanza.

Transversalidad

Historia 1

Tales de Mileto (624 a.C. – 546 a.C.), filósofo y matemático griego que realizó estudios de física y matemáticas, fue el primero en dar una explicación física del universo y enunció el teorema que lleva su nombre. Pida a los alumnos que mencionen una lista de las aportaciones que realizaron los griegos al conocimiento.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Verifique que los alumnos comprenden las preguntas que se le plantean, que sepan diferenciar cuándo se habla sobre los segmentos que se encuentran en R1 y R2, así como los segmentos correspondientes, es muy común que tengan dudas con esto. En caso de que lo entiendan, verifique que las respuestas están sustentadas bajo un buen argumento.

Cómo enriquecer la actividad

No olvide generar espacios de discusión donde el alumno tenga la posibilidad de exponer sus ideas y procedimientos, con el fin de que exista, de manera permanente, una evaluación de sus aprendizajes.

Qué observar

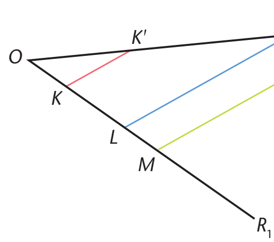
En la actividad 3.5 se presentan tres triángulos que son cortados de forma diferente por tres segmentos.

Observe que las razones de proporcionalidad para contestar las preguntas y llenar la tabla están consolidadas por parte de los alumnos. Verifique que establezcan de manera adecuada el teorema de Tales.

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO **Actividad 3.4**

1. La siguiente figura está formada por dos rectas, R_1 y R_2, las cuales se interceptan en el punto O, a su vez, se trazaron las paralelas KK', LL', MM', entre las rectas R_1 y R_2, formando los segmentos correspondientes.
   - ¿Cuáles son los segmentos que se forman en R_1?
     $\overline{OK}$, $\overline{KL}$, $\overline{LM}$
   - ¿Cuáles son los segmentos que se forman en R_2?
     $\overline{OK'}$, $\overline{K'L'}$, $\overline{L'M'}$
   - ¿Cuál es el segmento correspondiente a $\overline{OK}$?
     $\overline{OK'}$
   - ¿Y el correspondiente a $\overline{LM}$? $\overline{L'M'}$



$\frac{26-26}{100-65} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$

$\frac{26-10}{65-25} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

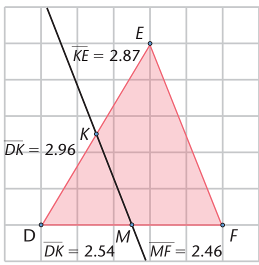
2. Consideren los valores que se dan para algunos segmentos y completen la siguiente tabla.

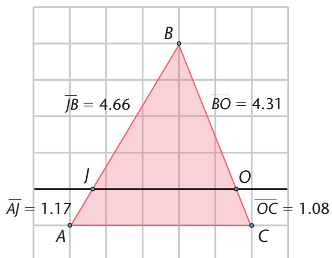
Recta R_1	Recta R_2	Razón entre las paralelas	
$\overline{OK} = 10$	$\overline{OK'} = 25$	$\frac{\overline{OK}}{\overline{OK'}} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$	$\frac{\overline{KL}}{\overline{K'L'}} = \frac{\overline{OL}-\overline{OK}}{\overline{OL'}-\overline{OK'}} =$
$\overline{OL} =$ 26	$\overline{OL'} = 65$	$\frac{\overline{OL}}{\overline{OL'}} = \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$	$\frac{\overline{LM}}{\overline{L'M'}} = \frac{\overline{OM}-\overline{OL}}{\overline{O'M'}-\overline{O'L'}} =$
$\overline{OM} = 40$	$\overline{OM'} =$ 100	$\frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$	$\frac{\overline{KM}}{\overline{K'M'}} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$

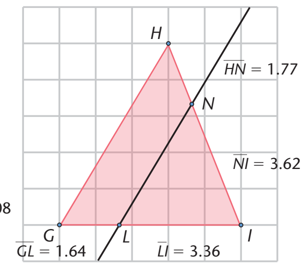
3. Comparen sus respuestas con las de algún equipo cercano y con la asesoría del profesor acuerden la forma correcta de determinar cuáles segmentos son correspondientes y cómo se debe expresar la razón de semejanza entre ellos.

PRACTÍCALO **Actividad 3.5**

1. Observen los tres triángulos dados y respondan las preguntas.







138

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

- ¿Los triángulos son congruentes o semejantes? Semejantes

Justifiquen su respuesta. Cada triángulo tiene dos lados comunes y el tercero es paralelo al lado correspondiente del otro triángulo.

- ¿Qué relación tienen los tres triángulos con respecto a su perímetro y las medidas de sus lados?

Lógicamente los perímetros tienen diferente medida, pero por ser triángulos semejantes los dados mantienen entre sí una relación proporcional.

2. Tomando como base el teorema de Tales, completen la siguiente tabla. La primera columna corresponde a la proporción y la sustitución, con base en su segmento; la segunda a la operación aritmética que da la longitud del segmento solicitado.

Segmento	Proporción y sustitución	Operación
$\overline{DK}$	$\frac{\overline{DM}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{KE}} = \frac{2.54}{2.46} = \frac{X}{2.87}$	$X = \frac{(2.54)(2.87)}{2.46}$
$\overline{JB}$	$\frac{\overline{JB}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{KE}}$ $\frac{x}{1.17} = \frac{4.31}{1.08}$	$x = \frac{(1.17)(4.31)}{1.08}$
$\overline{LI}$	$\frac{\overline{LI}}{\overline{GL}} = \frac{\overline{IN}}{\overline{NH}}$ $\frac{x}{1.64} = \frac{3.62}{1.77}$	$x = \frac{(1.17)(4.31)}{1.08}$
$\overline{MF}$	$\frac{DM}{MF} = \frac{DK}{\overline{KE}}$ $\frac{2.54}{x} = \frac{2.96}{2.87}$	$x = \frac{(2.54)(2.87)}{2.96}$
$\overline{JB}$	$\frac{JB}{AJ} = \frac{BO}{\overline{OC}}$ $\frac{x}{1.17} = \frac{4.13}{1.08}$	$x = \frac{(1.17)(4.31)}{1.08}$
$\overline{HN}$	$\frac{IN}{HN} = \frac{IL}{\overline{LG}}$ $\frac{3.62}{x} = \frac{3.36}{1.64}$	$x = \frac{(3.62)(1.64)}{3.36}$

3. Comparen su tabla con la de algunos equipos cercanos, y con la ayuda del profesor establezcan, ¿cuál es el proceso para poder plantear y sustituir los datos necesarios al establecer una proporción basada en el teorema de Tales?

Para leer más

Tales de Mileto es considerado uno de los siete sabios griegos, gracias a él fue posible construir la teoría de la semejanza de triángulos, que está basada en su famoso teorema.

Para tener en cuenta

El teorema de Tales textualmente dice: Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.

Cómo enriquecer la actividad

Selecciones a dos parejas para que expongan sus resultados y argumentos. Pídales que reproduzcan la figura en una hoja de papel bond, posiblemente los resultados y el planteamiento sean distintos, esto le permitirá caer en una discusión sana, la cual se solucionará con la participación de las demás parejas.

Recursos y materiales

En la página de *Encicloabierta*, encontrará más información y un simulador que le permitirá trabajar este tema con los alumnos, pídales que realicen las actividades que se presentan y permita el libre debate de ideas.

http://www.encicloabierta.org/node/364

http://recursos.encicloabierta.org/telesecundaria/3tls/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b03_t03_s01_descartes/index.html

Bitácora pedagógica

Qué observar

La actividad está planeada para observar cómo los alumnos han ido comprendiendo este contenido.

Observe que aplican las razones de los segmentos y que aplican con facilidad lo propuesto por Tales.

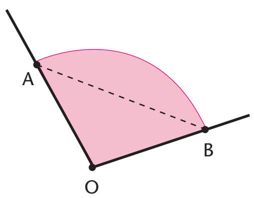
Cómo enriquecer la actividad

Verifique que los alumnos tienen el material que se les indica en esta actividad, valore si es necesario que se realice en pareja o en equipo.

Para consolidar aún más el conocimiento, pídales que visiten la página electrónica que se muestra en el libro, de esta forma podrán disipar dudas que hayan tenido durante este contenido.

Curiosidades, acertijos y más

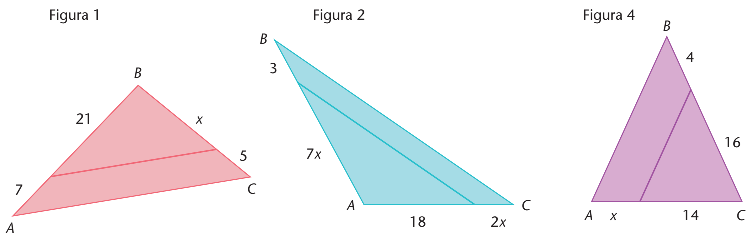
Se corta en tres partes iguales el segmento $\overline{AB}$ y por el extremo de cada parte se traza una línea que cruce por O, ¿del ángulo AOB queda dividido en tres partes iguales? Pruébalo.



Matemáticas 3. Por competencias

LO QUE APRENDÍ

1. Resuelve los siguientes triángulos utilizando el teorema de Tales.



- Explica la forma en que elaboraste el planteamiento de cada operación. Se establece la proporción con base en los lados paralelos no comunes.
- ¿De qué manera puedes demostrar que tus resultados son correctos? Encontrando alguna de las medidas conocidas (datos).

2. Toma como base alguna de las figuras y plantea una situación que pueda modelarse con ella, escríbela. Depende del alumno, se espera que el alumno la diseñe con base en su experiencia.
3. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros cercanos y con la ayuda del profesor llega a una conclusión que explique de manera breve, ¿cuál es el concepto del teorema de Tales y cuál es la manera correcta de utilizarlo?

USA LAS TIC

Visita la página http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b03_t03_s01_descartes/index.html (Consultada el día 15 de octubre de 2012, a las 10:32 horas), compara los conocimientos que ahora tienes por medio de este material interactivo y lleva a cabo una práctica con él; con la ayuda del profesor analicen el concepto del teorema de Tales y respondan: ¿de qué manera pueden demostrar la aplicación de dicho teorema para una figura en movimiento?

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en parejas. Consigan una hoja de acetato y, con ayuda de una hoja de rayas de un cuaderno y de un marcador permanente, tracen el rayado sobre el acetato. Ahora tomen una hoja blanca y tracen 4 segmentos de manera aleatoria y de la longitud que mejor les guste.
   a) ¿De qué manera utilizarían el acetato para dividir el primer segmento que trazaron en 3 partes iguales? Puede ser dividida de diversas maneras, siempre y cuando sea en tres partes.
   b) Dividan las otras 3 rectas, una en 4, otra en 5 y la última en 6 partes iguales utilizando el acetato, ¿la estrategia que utilizaron fue la misma? Verificando que se doblen en partes iguales y en el número de veces que se requieren.
   c) ¿Cuál es la relación que tiene esta actividad con el teorema de Tales? Las partes en las que se puede dividir una figura.
   d) ¿Cuáles son las características que permiten que con una hoja rayada se puedan dividir segmentos distintos en partes iguales? Porque las líneas pueden servir de guía para elaborar los dobleces.
2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una justificación que explique cuál es la razón por la que esta actividad está relacionada directamente con el Teorema de Tales.

Bitácora pedagógica

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 4	Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

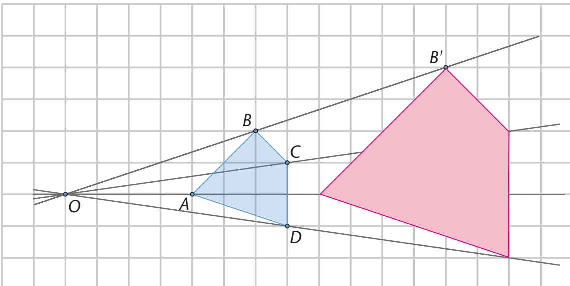
ACUÉRDATE DE...

1. Reflexionen acerca de las preguntas que se plantean y, en parejas, elaboren una respuesta para cada una.
   a) Geométricamente, ¿qué es la semejanza?
   Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma pero distinto tamaño.
   b) Si se tienen dos figuras, ¿cuáles son las características principales que nos permiten conocer si son semejantes o no?
   La medida de sus ángulos internos y la relación de proporcionalidad entre sus lados.
   c) ¿En una poligonal abierta o cerrada se pueden obtener figuras que sean semejantes?
   Sí
2. Comparen sus resultados con los de algunas parejas cercanas y con la ayuda del profesor redacten una conclusión propia basada en sus conocimientos y experiencia de lo que es la semejanza entre dos figuras y cuáles son las características que presentan.

PRACTÍCALO

Actividad 4.1

1. Con ayuda de un compás, tomen la medida de cada uno de los vértices del polígono mostrado en la figura y midan la distancia que hay al centro *O*, luego, sobre cada recta encuentren los puntos que corresponden a la imagen de cada uno.
   a) Respondan las preguntas.



- ¿La figura que obtuvieron es congruente con la figura original? No, es semejante
- ¿Consideran que ambas figuras pueden ser congruentes y semejantes al mismo tiempo? No, solo semejantes
- ¿Consideran que los lados de la imagen obtenida son paralelos a los lados de la figura original? Sí
  Justifiquen su respuesta. La figura cambió de tamaño, pero no de posición y conservó su forma, por lo tanto, sus lados son proporcionales y paralelos.

Qué observar

Uno de los temas al que se le había dado poca importancia es a la homotecia, esto se debe principalmente a que, como trazo, a muchas personas les parece laborioso y repetitivo, lo cual resulta incierto; más bien es una carencia de recursos en el uso de instrumentos y trazado de paralelas (teorema de Tales).

Cómo enriquecer la actividad

Es recomendable que introduzca al alumno a la utilización de las escuadras, para comprobar el paralelismo entre los lados homólogos de figuras que presentan homotecia, sea en razón positiva o negativa.

Recursos y materiales

En la página Gobierno de las Canarias, encontrará información teórica y un interactivo que le permitirá reforzar este tema. Pida a los alumnos que la visiten y comprueben en su cuaderno los ejercicios que se proponen.
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/matematicas/Geometria/Actividades/Transformaciones/homotecias.htm

Bitácora pedagógica

Cómo enriquecer la actividad

Solicite al alumno que primero trace la imagen en su cuaderno y posteriormente lo pase al libro, agregando más filas y columnas a la cuadrícula que se encuentra en el libro.

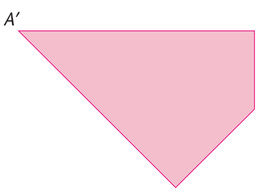
Qué observar

Esta actividad está planteada para que se realice en parejas.

Verifique que el alumno hace buen uso de las escuadras, para que las líneas trazadas toquen cada uno de los vértices de la figura propuesta y la figura que se va a obtener.

Cambiando números

Pida a sus alumnos que realicen esta actividad en su cuaderno para que dispongan de más espacio para trazar la imagen. La figura que resultará será la siguiente:



Matemáticas 3. Por competencias

- Al seguir este procedimiento, ¿qué relación tienen entre sí ambas figuras en cuanto a tamaño? Expliquen su respuesta. Tienen una relación proporcional 2:1.

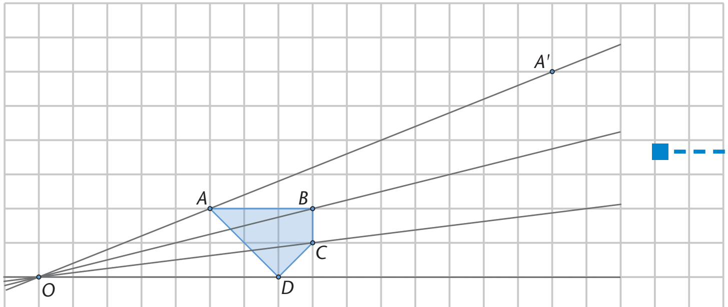
2. Comparen sus resultados con los de algún equipo cercano y con la ayuda de su profesor concluyan qué características encuentran cuando una figura y su imagen quedan del mismo lado del punto que se utilizó como vértice de las rectas auxiliares con las que se trazaron.

PRACTÍCALO **Actividad 4.2**

1. Tracen la imagen correspondiente a la figura original, con base en el punto dado, y respondan las preguntas.

Glosario

Homotecia. Es la transformación de una figura en el plano, a partir de un punto (centro) y una constante (razón de homotecia). La homotecia es una manera más de obtener figuras a escala.



- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar los puntos faltantes? La distancia entre el vértice O y los vértices ABCD es la tercera parte de la que hay a los vértices primos de la figura obtenida.
- ¿Los lados que forman la imagen siguen siendo paralelos a los lados de la figura original? ¿Por qué ocurre esto? Porque no cambia ni la forma ni la orientación, sus lados siguen siendo paralelos y proporcionales entre sí.
- ¿Qué relación guarda la imagen obtenida con la figura original en cuanto a su tamaño? 3:1 ¿Cómo determinaron esta medida? Midiendo la relación que hay en la distancia con respecto al punto O.
- ¿Qué relación hay entre el perímetro de la figura original y su **homotecia**? El perímetro es proporcional, está en relación de 1 a 3 (8.24 y 24.73) respectivamente.
- ¿Qué relación hay entre el área de ambas figuras? La superficie es 9 veces mayor que la de la figura original.
- ¿Qué diferencia hay entre la relación de los perímetros y las áreas de ambas figuras? El perímetro mantiene una relación proporcional, el área no.
- ¿Cómo expresarían en una escala la relación entre ambas figuras? 3:1 Justifiquen su respuesta. Por cada unidad de longitud en la figura uno hay 3 en la imagen obtenida.

2. Comparen sus respuestas con las de algunas parejas cercanas y con ayuda del profesor determinen cuándo dos figuras coinciden con rectas que convergen en un mismo punto, ¿cómo es posible obtener su relación en cuanto a su tamaño y escala? Depende del trazo alumno

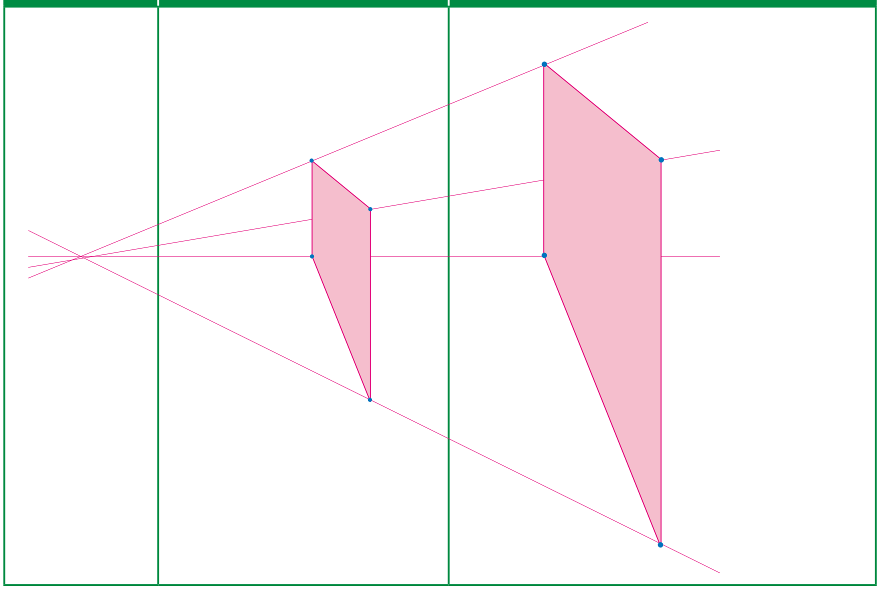
Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

PRACTÍCALO **Actividad 4.3**

1. Realicen lo que se pide y al finalizar, respondan las preguntas.
   a) En el siguiente recuadro, dentro de la columna que dice figura original, tracen un cuadrilátero.
   b) En la columna con título Vértice ubiquen un punto y a partir de él tracen líneas hacia cada vértice del cuadrilátero, las cuales crucen la columna "Imagen obtenida".

Vértice	Figura original	Imágen obtenida



- ¿Cuál fue la estrategia que utilizaron para ubicar el cuadrilátero y el vértice para que su imagen estuviera dentro de la tercera columna? Depende del trazo alumno
- ¿Fue posible determinar una relación exacta entre el tamaño de ambas figuras? Sí
  ¿Por qué ocurrió esto? Porque son semejantes
- ¿Las figuras mantienen condiciones de paralelismo entre sus lados?
- ¿Los ángulos entre ambas figuras son correspondientes? Sí
  ¿Cómo pueden justificar su respuesta? Porque son figuras con la misma forma, es decir, tienen ángulos iguales.

2. Comparen sus respuestas con algunas parejas cercanas y con la ayuda del profesor determinen qué condiciones es necesario observar para poder construir figuras semejantes en una superficie dada.

143

Qué observar

Realice un recorrido por el salón de clases a fin de verificar que el alumno toma el punto del vértice de manera correcta, así como observar que con las escuadras se tracen las líneas que toquen cada uno de los vértices del cuadrilátero (figura original) y que la imagen obtenida sea proporcional a la original.

Cómo enriquecer la actividad

Se recomienda que en esta actividad no se detenga el trabajo en el trazo, es conveniente que se haga un análisis reflexivo de la construcción con el propósito de reafirmar los principios aprendidos.

Reflexión

Invite a los alumnos a reflexionar la siguiente frase.

"Uno de los principales objetivos de la educación debe ser ampliar las ventanas por las cuales vemos al mundo."

Arnold Glasow.

Bitácora pedagógica

Qué observar

En esta actividad ponga atención en los segmentos que se presentan en la figura original, observe que en la imagen obtenida por homotecia el valor de los segmentos es proporcional. Verifique que los trazos, respuestas y justificaciones son correctas.

Cómo enriquecer la actividad

Si el alumno tiene problemas al utilizar las escuadras para obtener la homotecia de la figura, guíelo haciendo un ejemplo, paso a paso, con la finalidad de que los alumnos empleen de forma correcta los instrumentos de geometría.

Reflexión

"Lo peor es educar por métodos basados en el temor, la fuerza, la autoridad, porque se destruye la sinceridad y la confianza, y solo se consigue una falsa sumisión."

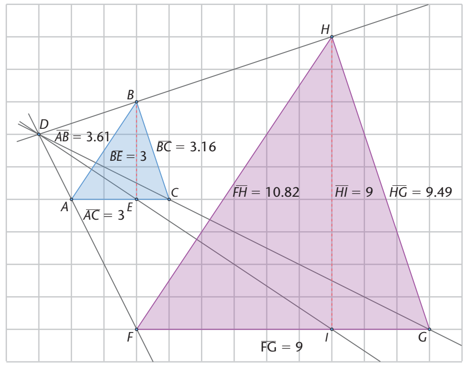
Albert Einstein.

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 4.4

1. Comparen los triángulos mostrados, observen las medidas de los segmentos dados y respondan las preguntas.



- Los triángulos, ¿son proporcionales en la longitud de sus lados? Sí

  ¿Cómo pueden demostrar que su afirmación es correcta? Encontrando su razón de semejanza.

- ¿Cuál es la razón entre los segmentos dados?

  1:3

  Justifiquen su respuesta. Por cada unidad de la figura 1 hay 3 en la figura 2.

- ¿Cómo es posible demostrar las condiciones de paralelismo entre los segmentos de ambas figuras, así como la igualdad en la medida de sus lados?
  Utilizando la cuadrícula para verificar la inclinación y usando la razón de semejanza para demostrar la proporcionalidad de los lados.
- ¿Cuál es la relación entre la superficie de ambas figuras? Expliquen su respuesta.

  La superficie azul cabe 9 veces en la superficie rosa.

- ¿Es la misma relación la que se presenta entre el área y el perímetro de ambas figuras? No

  Expliquen su respuesta. El perímetro es proporcional en ambas figuras, la superficie no, porque por cada unidad lineal no crece lo mismo las unidades de superficie.

- Si decimos que k representa la razón entre ambas figuras, ¿qué número le corresponde?

  k = 0.3 ■Comparando la primera con la segunda y k = 3 comparando la segunda con la primera.

  Entonces, ¿cuántas veces es mayor el triángulo FGH en comparación con ABC? Tres veces

2. Comparen sus resultados con los de otro equipo y con la ayuda del profesor establezcan cuál es la relación que existe entre la distancia del centro de homotecia a cada uno de los vértices del primer triángulo en relación al perímetro y área de la segunda figura.

Para tener en cuenta

La *homotecia* es la transformación de una figura que se realiza con base en un punto específico, las figuras que se obtienen son semejantes, ya que tienen la misma forma, sus lados son paralelos, sus ángulos iguales y son proporcionales las medidas de sus lados.

Para que dos figuras sean homotéticas se deben cumplir dos condiciones:

1. Que los lados entre las figuras sean paralelos entre sí.
2. Que las rectas auxiliares que unen sus vértices converjan en un solo punto llamado centro de homotecia.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

LO QUE APRENDÍ

1. Analiza, plantea, resuelve y comprueba tus resultados para los siguientes problemas.
   a) Si a un cubo que tiene 64 cm^3 de volumen se le aplica una homotecia tal que $k = 2$.
      - ¿Cuánto mide su volumen? 512 cm^3
      - ¿Cuánto mide la superficie del área de la base? 64 cm^2
      - ¿Cuánto mide cada uno de sus lados? 8 cm
   b) Si se tiene un triángulo equilátero donde sus lados miden 3 cm y se le aplica una homotecia de manera que $k = 4$, ¿cuál es el perímetro resultante? 36 cm
   c) El área de un cuadrado, luego de aplicar una homotecia, mide 100 cm^2, si el cuadrado original mide 4 cm^2, ¿cuál fue el factor de homotecia que se aplicó? k = 5

      Explica tu resultado. Si la base del primer cuadrado mide 2, es necesario multiplicarla por 5 para que de un cuadrado de 10 cm de base.
2. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y, con la ayuda de tu profesor, ofrece con tus propias palabras una explicación breve que describa cuál es el proceso completo que se debe realizar para analizar, plantear, resolver y comprobar un problema donde intervienen la homotecia y la semejanza entre dos figuras.

Qué observar

Esta actividad está diseñada para que el alumno aplique lo que ha aprendido en este contenido. Verifique que el uso de las escuadras y el trazo son los correctos, de la misma manera que el concepto de homotecia lo tiene bien consolidado.

Desarrolla tus habilidades

1. Lee con detenimiento las siguientes instrucciones, realiza lo que se pide y al final responde las preguntas y llega a una conclusión.
   a) Toma una lupa convencional y selecciona un objeto que se pueda ver con comodidad a través de ella.
   b) Coloca la lupa tan cerca como puedas del objeto y observa hasta qué distancia la puedes separar para que el objeto se vea más grande.
   c) Aleja la lupa a una distancia mayor al punto que tu consideres como el máximo.
      - Al aumentar la imagen del objeto con la lupa, ¿dónde consideras que se encuentra el centro de homotecia? Atrás del objeto

        Explica tu respuesta. El objeto original está entre el centro de homotecia y la imagen de la lente.
      - En el punto que tú consideras como el máximo para alejar la lupa del objeto sin que se pierda el aumento de la imagen, ¿dónde se encuentra el centro de homotecia? Todavía detrás del objeto

        Justifiquen su respuesta. Mientras se vea la imagen el centro de homotecia está atrás de la original.
      - Cuando excedes ese punto máximo, ¿cómo se ve la imagen del objeto a través de la lupa? Invertida

        ¿Por qué crees que ocurre esto? Porque ahora el centro de homotecia está entre la figura original y su imagen.
      - Al pasar de este punto máximo, ¿dónde se encuentra el centro de homotecia? Entre ambas figuras

        Explica tu respuesta. Una imagen reflejada por un punto entre ella y su imagen, invierte su forma.
2. Con la ayuda del profesor concluyan sobre la relación que tiene la semejanza de figuras y la homotecia en fenómenos físicos, como la reflexión de un objeto a través de un lente de aumento.

USA LAS TIC

Visita la página http://www.educacionplastica.net/zirkel/homotecia.html (Consultada el día 15 de noviembre de 2012, a las 18:26 horas), ahí encontrarás una actividad interactiva simple, pero que ilustra muy bien la razón de semejanza entre los lados de dos figuras y podrás compararla utilizando un control deslizador; después, experimenta haciendo cálculos entre los triángulos en diferentes posiciones y comprueba tus resultados por medio de operaciones.

Cómo enriquecer la actividad

Valore si esta actividad se trabaja en parejas o en equipo. Verifique que traen los materiales para su realización.

Prepare al grupo para que al término de la actividad justifiquen sus procedimientos y respuestas.

Pídales que visiten la página de internet que propone el libro para que consoliden su aprendizaje.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Partimos del hecho de que el alumno ha aprendido a tabular, graficar e interpretar diversas funciones. La actividad **Acuérdate de...** puede considerarse como un antecedente para involucrar al alumno al estudio de estas expresiones algebraicas.

Cómo enriquecer la actividad

Conforme los alumnos estén respondiendo cada una de las preguntas, aproveche para que se acostumbren a analizar y a dar significado a los elementos que contiene esta expresión cuadrática.

Recursos y materiales

En la siguiente página, encontrará teoría y ejemplos en los que se representa la gráfica de diversas ecuaciones cuadráticas, que le permitirán introducir a los alumnos a este tema.

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L1_T1_text_final_es.html

Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 5	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

ACUÉRDATE DE...

1. Al lanzar una pelota hacia arriba, todos dan por hecho que nuevamente va a caer, reflexionen acerca de esta acción y contesten las preguntas.
   - ¿De qué depende la altura que alcance la pelota? De la fuerza con la que se lance.
   - ¿Cuál será la velocidad de la pelota al llegar a su punto más alto? Cero unidades de longitud por tiempo.

   Entonces, ¿qué ocurre con la velocidad desde que la pelota es lanzada hasta que regresa nuevamente? Al subir pierde velocidad hasta llegar a cero, luego la incrementa al caer hasta tomar nuevamente la velocidad con la que fue lanzada.
   - ¿Será posible calcular la distancia que ha recorrido la pelota en distintos momentos del lanzamiento? Sí Justiquen su respuesta. Recorre diferentes distancias, pero se pueden medir.
   - ¿En qué influye la fuerza con la que es lanzada la pelota en relación a la distancia que recorre y el tiempo que tarda en su recorrido? A mayor fuerza, mayor tiempo y mayor distancia.
   - Si se tomara la distancia recorrida durante distintos tiempos y luego con ello se hiciera una gráfica que relacionara la distancia y el tiempo, ¿qué forma consideran que tendría la gráfica obtenida? Una parábola Justifiquen su respuesta. No es una relación lineal, es una curva plana, abierta y simétrica.
2. Comparen sus respuestas con las de algunas otras parejas y con la ayuda del profesor concluyan cómo es una gráfica que represente la relación entre la distancia y el tiempo durante un tiro vertical.

PRACTÍCALO

Actividad 5.1

1. Al lanzar una pelota, Luis pidió a su amigo Francisco que calculara aproximadamente la altura a la que se encontraba la pelota en cada segundo del lanzamiento, Paco contó sólo 4 segundos en total y registró las alturas (en metros) en una tabla.

Tiempo	Distancia
0	0
1	6
2	8
3	6
4	0

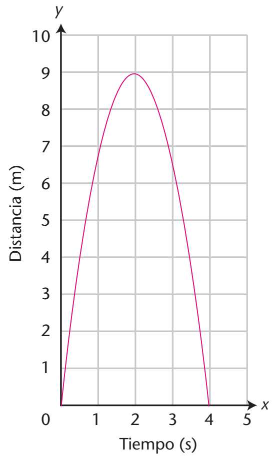
a) Respondan las preguntas.
   - ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó la pelota? 8 metros
   - ¿En cuánto tiempo alcanzó su altura máxima? En 2 segundos
   - ¿Por qué las cantidades para los tiempos 0 y 1 es la misma para los tiempos 3 y 4? Porque recorrió la misma distancia, solo que en sentido inverso.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

b) Construyan la gráfica correspondiente a la tabla y respondan las preguntas.

- ¿Cómo se llama la línea obtenida en la gráfica? Parábola
- Algebraicamente, este tipo de líneas, ¿con qué tipo de expresiones se representan? Con expresiones de segundo grado.
- ¿Qué característica específica debe tener una expresión algebraica para que dé una curva de este tipo? El máximo exponente de la expresión debe ser 2.



c) Comparen sus respuestas con las de algún equipo cercano y con la ayuda del profesor sinteticen qué es una curva de segundo grado y qué características tienen las expresiones algebraicas que las representan.

PRACTÍCALO

Actividad 5.2

1. La expresión algebraica $y = -2x^2 + 8x$ representa la ecuación del problema anterior, completen la tabla y respondan las preguntas.

Tiempo	Distancia	Operaciones
0	0	$-2(\ 0\ )^2 + 8(\ 0\ ) = 0$
1	6	$-2(\ 1\ )^2 + 8(\ 1\ ) =$
2	8	$-2(\ 2\ )^2 + 8(\ 2\ ) =$
3	6	$-2(\ 3\ )^2 + 8(\ 3\ ) =$
4	0	$-2(\ 4\ )^2 + 8(\ 4\ ) =$

- ¿Corresponden los resultados a los obtenidos en la actividad anterior? Sí
- ¿Qué relaciones pueden encontrar entre los términos de la expresión algebraica y la parábola que representa? Que para "y" son simétricos con respecto a la parábola.
- ¿Cómo es posible obtener la distancia recorrida por la pelota entre los segundos 3 y 4? Resolviendo la ecuación sustituyendo los tiempos 3 y 4, respectivamente.
- El procedimiento es el mismo para calcular la distancia entre los segundos 1 y 2? Sí
  Expliquen por qué ocurre esto. Porque solo se está sustituyendo el tiempo en la misma expresión algebraica.

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor concluyan cuál es el procedimiento para poder graficar una parábola a partir de una expresión algebraica dada.

Qué observar

La tabulación para encontrar los valores de *y* es indispensable, ya que con ello se puede construir la gráfica correspondiente. Verifique que la sustitución y los resultados son acordes con la gráfica que obtendrán.

Cómo enriquecer la actividad

Pida al grupo que identifique el coeficiente de x^2 en la expresión cuadrática, pregunte lo que ocurrirá con la gráfica si este valor es diferente cuando es positivo. Pídales que realicen en su cuaderno ambas gráficas y que las comparen. Permita el intercambio de puntos de vista entre los integrantes del grupo.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

El comportamiento de las poblaciones de algunos insectos y bacterias siempre presentan situaciones cuadráticas, es decir, a la hora de graficar los individuos de una población se observa que estos se reproducen y la población se comporta de manera exponencial.

Bitácora pedagógica

Cambiando números

A partir de esta situación, y considerando a uno de los lados como x, el alumno deberá obtener la expresión cuadrática que se forma si la superficie del rectángulo es igual a 15 cm². Verifique que la expresión algebraica está bien planteada.

Cómo enriquecer la actividad

Propicie que al dar respuesta a cada una de las preguntas de esta actividad, argumenten sus observaciones y respuestas, y que propongan otros ejemplos para que consoliden sus apreciaciones.

Transversalidad

Ciencias 2, Física

En el área de la Física, es muy común que diversos fenómenos presenten gráficos en forma de curva ascendente y descendente, tal es el caso del comportamiento de la energía cinética si la masa es constante y la velocidad es variable.

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO — Actividad 5.3

En la actividad anterior trabajaron con una ecuación cuadrática conocida, sin embargo, es posible obtener una expresión de este tipo si se aprende a modelar la situación que la representa.

1. El perímetro de un rectángulo es de 16 cm.
   a) En su cuaderno tracen los posibles rectángulos que cumplan con esta condición.
   b) Elaboren una tabla con las dimensiones del largo y el ancho de las figuras que encontraron.

Largo	7	6	5	4
Ancho	1	2	3	4

- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar las dimensiones de cada rectángulo? Se divide el perímetro en 4 lados, iguales 2 a 2 y que sumen 16 cm.
- ¿Cuál de las figuras obtenidas tiene más superficie? La ultima de 4 x 4
  ¿Cuál tiene la menor superficie? La primera de 7 x 1
- ¿Por qué tienen superficie distinta si tienen el mismo perímetro? Por la diferencia que hay entre las dimensiones del largo y el ancho.
- Si uno de estos rectángulos tiene una superficie de 15 cm², según la tabla, ¿cuáles son sus dimensiones? 5 de largo por 3 de ancho.
- Si representamos con una x a uno de los lados de cualquiera de los rectángulos, ¿cuál es la expresión algebraica que permite expresar el valor del otro lado? x más o menos la diferencia con el otro lado
  Expliquen su respuesta. Ambos lados se pueden expresar en términos de x, no es necesario incluir otra literal.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la multiplicación de los dos lados y que da como resultado 15 cm²? $15 = x(x + 2)$
- ¿Cómo queda esta expresión cuando se acomoda como una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c$? $x^2 + 2x - 15 = 0$
- Expliquen, ¿cuál fue el procedimiento que realizaron? Se eliminan paréntesis y se ordena la ecuación y se iguala a cero.

2. Comparen sus resultados con los de algunos compañeros y con la ayuda del profesor determinen cuál es el proceso para plantear y expresar en su forma más simple una expresión de segundo grado a partir del modelado de una situación.

PRACTÍCALO — Actividad 5.4

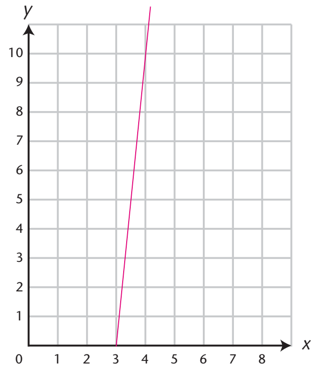
1. Retomen la ecuación obtenida en la sección anterior y completen la tabla para los valores dados en x.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-12	-7	0	9	20	33	48	65

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

a) Usando los valores dados, tracen la gráfica correspondiente a esta ecuación.



- ¿Hacia dónde abre la parábola? Hacia arriba
- ¿Qué determina esta posición? El signo positivo del término de segundo grado.
- ¿En qué puntos corta la parábola al eje de las x? -5 y 3
- ¿Qué relación tienen estas cantidades con la superficie buscada en la actividad anterior donde se requería encontrar las medidas de un rectángulo que midiera 15 cm^2 de superficie? 3 por ser positivo es la solución.
- ¿Cómo puedes describir la relación entre los valores de ambos ejes? Los puntos donde corta al eje x coinciden con la solución algebraica de la ecuación.
- Por lo tanto, ¿qué representan gráficamente los puntos de intersección en el eje x? La solución gráfica a la ecuación son los puntos de intersección sobre el eje x.

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una breve síntesis del proceso para modelar, interpretar y resolver un problema donde interviene la representación gráfica de una ecuación de segundo grado.

Para leer más

Gráficamente, en una ecuación cuadrática, si el término de primer grado y el término independiente valen cero, la parábola tiene su vértice en el centro del plano, y su eje coincide con el eje y, el sentido hacia donde abre se lo da el signo positivo (hacia arriba) y negativo (hacia abajo). Cualquier alteración en el término de primer grado provoca un desplazamiento de la parábola (hacia la derecha o la izquierda) o en el independiente (hacia arriba o hacia abajo).

Para tener en cuenta

La gráfica que relaciona la distancia recorrida y el tiempo en fenómenos físicos como el tiro vertical o la caída de un objeto en un plano inclinado, se llama parábola, esto es una curva plana y abierta. Algebraicamente la expresión que la representa debe tener como máximo exponente el 2 en su variable y puede ir acompañada de un término de primer grado, un término independiente o ambos.

Qué observar

Una vez que obtuvieron una expresión cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, es necesario que realicen de manera correcta la tabulación, de esta forma trazarán una parábola con abertura hacia arriba.

Cómo enriquecer la actividad

Si el espacio es insuficiente para trazar la parábola, pídales que la hagan en su cuaderno.

Pida a los alumnos que expliquen ¿cuál o cuáles son los coeficientes que hacen que la parábola se comporte de esta manera?

Permita el ensayo y dé el tiempo necesario para ello, o en su caso sugiérales que la realicen en casa, sin olvidar que en la siguiente sección se debe de revisar y pedir conclusiones.

Transversalidad

Geografía de México y del mundo

En la realización de los censos de población al momento de realizar una gráfica que demuestre el comportamiento de la población en un tiempo determinado, se observa que no es proporcional, sino que presenta una curva ascendente.

Bitácora pedagógica

Qué observar

En esta actividad, el alumno debe de encontrar la expresión cuadrática que modela esta situación, para que con ella pueda, por medio de la tabulación, encontrar los valores de *y* para que de esta manera puedan trazar su gráfica. Si el espacio es insuficiente, sugiera que la realicen en su cuaderno.

Cómo enriquecer la actividad

Aproveche esta actividad para que, si el grupo obtuvo el análisis y su comprobación, sugiera otras situaciones, de esta manera desarrollarán la habilidad de conocer el comportamiento de manera mental de la gráfica que se desea obtener.

Reflexión

"Trabajar en equipo no es una virtud. Es una elección consciente y voluntaria que surge construyendo lazos de confianza basados en la vulnerabilidad humana que muestran los integrantes del equipo, ante errores, temores y dificultades."

Patrick Lencioni.

Matemáticas 3. Por competencias

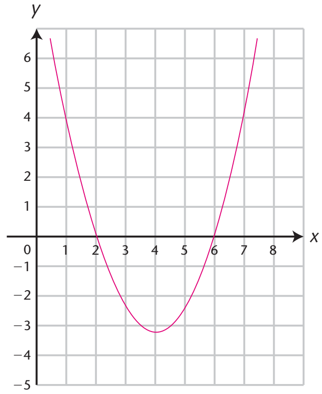
LO QUE APRENDÍ

1. Dado un rectángulo que tiene un perímetro de 16 unidades y una superficie de 12 u^2 encuentra las medidas del largo y el ancho por medio del modelado de esta situación, traza la tabla con los valores necesarios para realizar la gráfica y comprueba algebraicamente tus resultados. Plantea claramente la función necesaria.

a) Completa la tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

b) Traza la gráfica.



c) En tu cuaderno resuelve algebraicamente la ecuación y comprueba el valor gráfico de las raíces.

d) Compara tus resultados con los de algún compañero y con la ayuda del profesor verifica que tus respuestas y procedimientos sean correctos.

USA LAS TIC

En la página http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b03_t05_s01_descartes/index.html (Consultada el día 11 de diciembre de 2012, a las 13:36 horas), encontrarás una actividad interactiva que te ayudará a comprender este tema, observa cómo aplicar los conocimientos que adquiriste y posteriormente comenta tu visita con tu profesor.

Desarrolla tus habilidades

1. Si se deja caer libremente un cuerpo desde la torre de Pisa, que tiene una altura de 77.5 m aproximadamente, ¿en cuánto tiempo llegará al suelo?

   a) Utiliza tus conocimientos de física y con ellos modela esta situación en tu cuaderno o en hojas blancas.

   - Elabora una representación gráfica del problema.
   - Encuentra la ecuación cuadrática que la representa.
   - Construye la tabla y la gráfica correspondientes.
   - Comprueba tus raíces resolviendo algebraicamente la ecuación cuadrática.

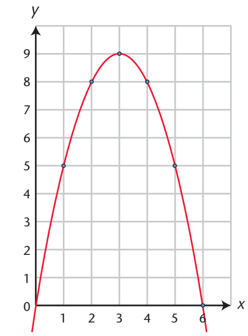
Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 6	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

ACUÉRDATE DE...

1. En la gráfica mostrada se puede apreciar el tiro más alto que logró hacer Iván.
   a) Analicen la imagen y respondan las preguntas.
   b) Con la información de la gráfica completen la siguiente tabla.



x	*y*	*x*	*y*
1	5	4	8
2	8	5	5
3	9	6	0

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta parábola? $-x^2 + 6x = 0$
- ¿De qué manera determinaron la expresión? Se puede determinar por el método de diferencias o bien por el método de ensayo y error.
- ¿De qué tipo de expresión se trata? De una ecuación cuadrática que carece de término independiente.
- Expliquen, ¿cómo determinaron los valores de los coeficientes? Por los puntos de intersección sobre el eje de las *x*.

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la asesoría del profesor corroboren los procedimientos que utilizaron y determinen cuál es la relación entre la gráfica y la expresión algebraica que la modela.

PRACTÍCALO

Actividad 6.1

1. Analicen la situación planteada y respondan las preguntas.
   a) El refrigerador del Sr. Rogelio está fallando, para conocer cómo está trabajando registró la temperatura que marcó durante un día. Analicen la gráfica que elaboró y respondan las preguntas.
   - ¿Qué ocurrió con la temperatura durante las primeras dos horas? Se mantuvo constante en 4 °C.

151

Qué observar

Este es el primer acercamiento que tiene el alumno al trazado e interpretación de graficas compuestas por secciones de rectas, curvas o ambas; por tanto, en este contenido se escogieron situaciones cotidianas, para que el alumno mediante el análisis de gráficas, sea capaz de interpretar situaciones donde las variaciones no son constantes en diferentes momentos.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que todas las actividades de este contenido las trabajen en parejas o en equipo y se hagan las reflexiones pertinentes y necesarias para obtener conclusiones únicas, apoyándose en los cuestionamientos propuestos.

Recursos y materiales

En la página de *ThatQuiz*, encontrará aplicaciones sobre gráficas que le serán de utilidad para enriquecer su clase.

http://www.thatquiz.org/es-0/matematicas/algebra/

http://www.thatquiz.org/es-5/

Bitácora pedagógica

Qué observar

En una gráfica se puede encontrar información, cuando ésta se analiza de manera correcta. En muchos casos se requiere hacer uso de la interpolación o extrapolación para conocer datos que no se encuentran cuando se tabula, pues se tiene una expresión algebraica con ciertos valores dados a x para encontrar los valores de y.

Cómo enriquecer la actividad

A partir de la expresión que modela esta situación, pida a los alumnos que realicen la gráfica en su cuaderno y pregunte si la gráfica que resulta es simétrica. Pídales que comprueben su respuesta.

Matemáticas 3. Por competencias

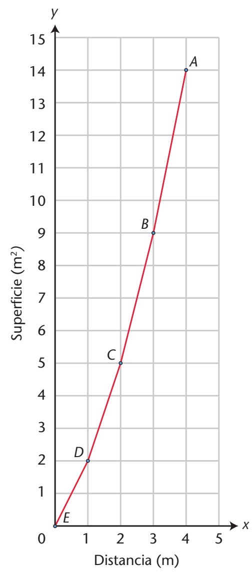
- ¿En qué periodo descendió más la temperatura? En el periodo de las 2 a las 5 horas.
- ¿Qué ocurrió con la temperatura entre las 9 y las 14 horas? Subió la temperatura, pero no proporcionalmente con el tiempo.
- ¿En qué periodo el incremento de temperatura se dio de manera regular? En el periodo de las 5 a las 9 horas.
- ¿En cuántos periodos la temperatura descendió de manera regular? En dos, de 2 a 4 y de 4 a 5.

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la asesoría del profesor determinen cuál es la manera correcta de interpretar gráficas que relacionan temperatura y tiempo y que, además, presentan secciones rectas y curvas.

PRACTÍCALO **Actividad 6.2**

1. Leonardo acaba de comprar un proyector para hacer las presentaciones de su trabajo, y está probando a qué distancia lo debe colocar para obtener una imagen con la mayor calidad posible, para ello está moviendo su proyector a distancias regulares. En sus primeras pruebas una quedó muy pequeña, otra cubría la pantalla correctamente y en otra más la imagen se salía.

   En la gráfica se puede observar la relación entre la distancia a la que separó el proyector y la medida de la superficie que proyecta.



   a) Con base en esta información, respondan las preguntas.
   - ¿Cuántos metros cuadrados de superficie puede proyectar si separa el proyector 3 m? $9\ m^2$
   - ¿Cuántos metros cuadrados de superficie puede cubrir si lo separa 4 m? $14\ m^2$
   - Entonces, ¿cuántos metros cuadrados cubrirá si lo separa 5 metros? $20\ m^2$
   - ¿De qué manera calcularon este resultado? Encontrando la ecuación cuadrática que modela esta parábola.
   - Si quisiera obtener una imagen de $7\ m^2$, ¿a qué distancia tendría que colocar el proyector? A 2.5 m
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta parábola? ■$0.5x^2 + 1.5x = 0$
   - ¿Cuáles son los valores de los coeficientes? 0.5 para el término de segundo grado y 1.5 para el término de primer grado.
   - ¿De qué manera pueden comprobar que esta expresión es correcta? Resolviendo la ecuación y elaborando la tabla y gráfica correspondientes.

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una explicación breve acerca de cómo se debe interpretar una gráfica que contiene una parábola, y cuál es la relación que tiene con la expresión algebraica que la representa.

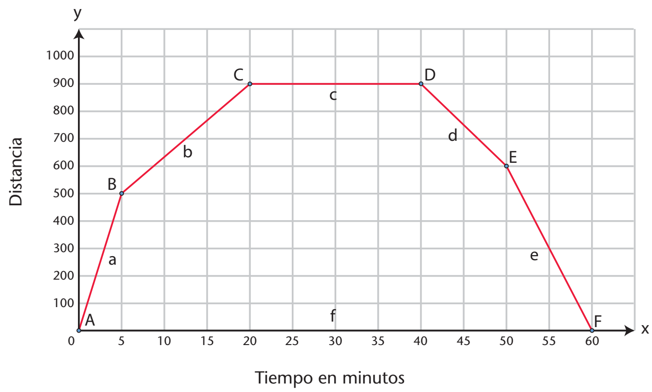
Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

PRACTÍCALO

Actividad 6.3

1. La mamá de Ricardo le pidió que fuera a casa de una de sus tías a recoger algunas cosas, él tomo su bicicleta e hizo el recorrido como se muestra en la gráfica. Analícenla y respondan las preguntas.



- ¿Qué distancia recorrió en los primeros 5 minutos? 500 m
- ¿Qué distancia recorrió entre los puntos *B* y *C*. 400 m
- ¿Cuánto tiempo permaneció en casa de su tía? 20 minutos
- ¿A qué distancia está la casa de su tía? 900 m
- ¿Cuánto tiempo tardó en regresar a su casa? 20 minutos
- En total, ¿cuánta distancia recorrió? 1800 metros
- ¿Cuánto tiempo utilizó desde que salió de su casa hasta que regresó? 60 minutos
- Describan, ¿cuál es la manera en la que se interpreta una gráfica de este tipo?
  Analizando la trayectoria de las líneas con base en los datos de los dos ejes.
- En su cuaderno, tracen una gráfica similar, en la que muestren algún recorrido que hayan hecho ustedes, y compárenla con el recorrido de Ricardo.

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen cuál es la forma que consideran más adecuada para poder analizar una gráfica que está formada por distintos segmentos de recta.

PRACTÍCALO

Actividad 6.4

1. El Sr. Noé tiene una purificadora de agua, ayer desinfectaron su tinaco y hoy lo va a llenar, para lo cual contrató una pipa con agua potable, en cuanto lo tenga lleno va a abrir su negocio y empezará a vender.

En la siguiente gráfica se puede observar el nivel que tuvo el agua durante todo el día de trabajo hasta que cerró su negocio.

Qué observar

Muchas situaciones de nuestra vida cotidiana se pueden representar a través de una gráfica, la información que se obtiene es por medio del análisis. Verifique que la información necesaria para responder cada cuestionamiento, por parte de los alumnos, es acorde con la que se encuentra en la gráfica de esta actividad.

Cómo enriquecer la actividad

Prepare al grupo para que realice una situación semejante a la de la actividad, o lleve al salón de clases varias gráficas; por ejemplo, del comportamiento de la temperatura, de la economía, etc. Prepare preguntas para que los alumnos a partir del análisis de la gráfica puedan responderlas. Permita la argumentación y discusión entre ellos.

Reflexión

Sobre el trabajo en equipo

"El aprendizaje en equipo es el proceso de alinear y desarrollar la capacidad del equipo para crear los resultados deseados por sus integrantes. Se construye sobre la disciplina del desarrollo de una visión compartida. También se construye con maestría personal."

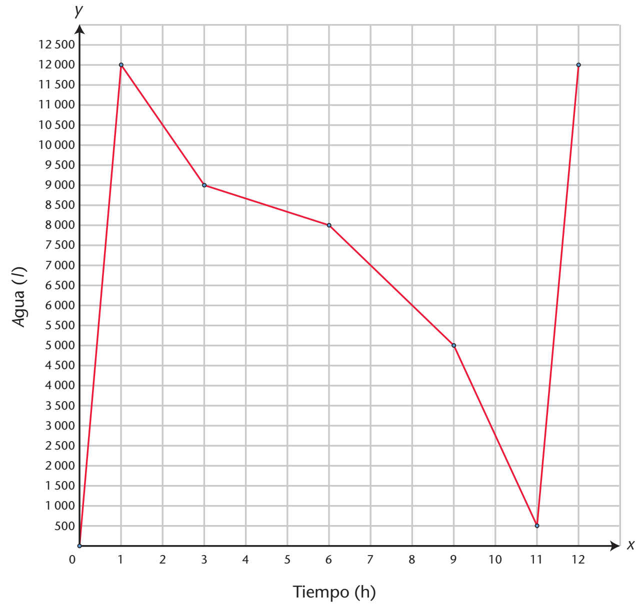
Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

Qué observar

Las gráficas por lo general no solo son representadas en forma lineal o curvas, sino que pueden combinarse. Lo importante es el análisis que se haga de ella. En muchos casos, una gráfica puede dar la información de un estudio determinado o el comportamiento de un fenómeno.

a) Analicen la gráfica y respondan las preguntas.



- Si empezó a llenar su tinaco a las 7 de la mañana, ¿a qué hora abrió el negocio? A las 8 de la mañana.
- Si cada garrafón tiene 20 litros de capacidad, ¿cuántos vendió en la primera hora? A las 8 de la mañana.
- ¿En qué tiempo vendió el agua? 150
- Si decidió cerrar su negocio y recargar nuevamente el tanque para tenerlo listo para el siguiente día, ¿a qué hora cerró? A las 6 de la tarde (18 horas).
- ¿Cuánto tiempo mantuvo abierto el negocio? 10 horas

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la asesoría del profesor determinen cuál es la conveniencia de saber interpretar gráficas que contienen líneas.

Cómo enriquecer la actividad

Seleccione a uno de los equipos para que exponga los resultados correspondientes a esta situación. Que responda con argumentos sólidos los cuestionamientos de los demás equipos, la realimentación permite la consolidación de conocimientos. Si es necesario, intervenga dando algunos consejos.

Para leer más

La capacidad de argumentación es, sin duda alguna, una competencia matemática muy importante, que se utiliza de manera permanente en el estudio de esta ciencia, esto permite validar o descartar conclusiones y con ello hacer el aprendizaje más significativo.

Es muy importante que analices e interpretes las deducciones a las que llegas durante las actividades, para generar más, es necesario que tengas discusiones con tus compañeros, siempre bajo la supervisión de tu profesor, lo que te permitirá verificar la validez de las mismas y consolidar tus conocimientos.

Transversalidad

Ciencias 2, Física

Comente a los alumnos que este tema de llenado de recipientes es aplicado en temas de física, principalmente en hidrodinámica e hidrostática, presión y velocidad de fluidos.

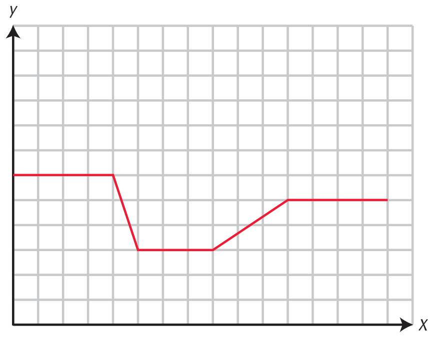
Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

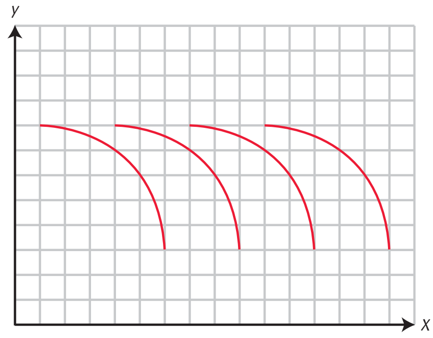
LO QUE APRENDÍ

1. Analiza las gráficas mostradas y responde las preguntas.

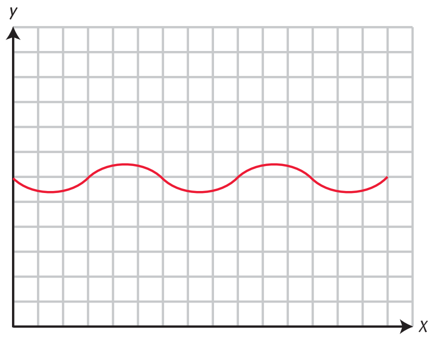
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

- ¿Cuál de las gráficas se puede relacionar con el recorrido de un automóvil? La gráfica 1
- ¿Cuál de las gráficas se puede relacionar con el lanzamiento de un objeto? La gráfica 4
- ¿Cuál de las gráficas se puede relacionar con el suero endovenoso que se le aplica a un paciente? La gráfica 3
- ¿Cuál de las gráficas se puede relacionar con los efectos en el organismo de un medicamento ingerido mediante pastillas? La gráfica 2

2. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y, con la asesoría de tu profesor, determina cómo se puede relacionar una gráfica con una situación por medio de la interpretación de la misma.

Qué observar

Esta actividad permitirá que el alumno pueda diferenciar la gráfica correspondiente a cada una de las situaciones que se plantean para su contestación. Dé el tiempo necesario para que las analicen y puedan dar respuestas correctas.

Cómo enriquecer la actividad

Una vez que han identificado la gráfica correspondiente a cada situación pídales que argumenten ¿por qué las seleccionaron?, ¿cuáles son las diferencias entre ellas?

Proponga otras gráficas para que sean los alumnos quienes respondan a qué fenómeno o situación corresponde.

Cómo enriquecer la actividad

Dibuje un plano en el pizarrón y pregunte a los alumnos que fruta partida a la mitad forma una curva y observe las diferencias entre ellas. Pida que expliquen la manera en que realizarían el corte.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Cerciórese de que las gráficas que trazaron para cada uno de los recipientes son acordes con su llenado.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que indiquen a qué recipiente pertenece cada una de las gráficas, que observen cuáles son lineales, curvas y compuestas.

Pida que justifiquen cada uno de sus bosquejos, con el fin de que cuando comparen sus resultados esta justificación sea bien sustentada. También puede realizar esta actividad en el laboratorio escolar para que comparen sus gráficas.

Reflexión

Sobre el liderazgo

Invite a los alumnos a reflexionar sobre la siguiente frase.

"Liderazgo significa que un grupo, grande o pequeño, está dispuesto a confiar la autoridad a una persona que ha demostrado capacidad, sabiduría y competencia."

Walt Disney

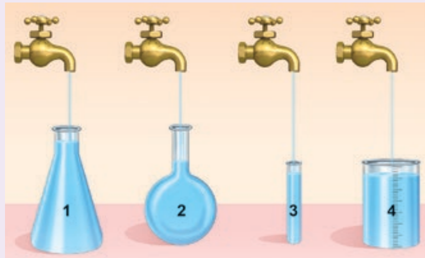
USA LAS TIC

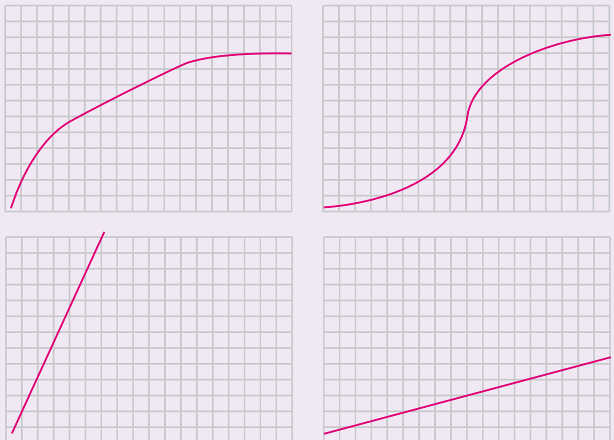
Visita la página http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Graficos02.html (Consultada el día 18 de marzo de 2012, a las 3:46 horas), en ella encontrarás información acerca de este tema, ejemplos y ejercicios. Durante tu visita, contrasta tus conocimientos con lo que en ella aparece y después de tu visita comenta con tu profesor, ¿cuál es la utilidad de contar con este tipo de recursos tecnológicos y cómo puede ser de utilidad en la vida cotidiana?

Desarrolla tus habilidades

1. En un laboratorio de química se están llenando algunos recipientes con líquido, todas las llaves se abren a un mismo tiempo y dan la misma cantidad de agua.

   a) Observen la imagen y realicen un bosquejo de las gráficas que representan la relación de la altura con el tiempo que tardan en llenarse.





- ¿Cuál es la estrategia que utilizaron para determinar la forma de la gráfica de cada recipiente? Analizar la forma del objeto con relación a la capacidad y el tiempo.
- ¿Qué criterio utilizaron para trazarlas? Determinar si son rectas, curvas o una combinación de ambas.
- ¿De qué manera es posible comprobar que los recipientes corresponden a las gráficas dadas? Calculando numéricamente el llenado de un objeto similar para tabular y graficar.

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una explicación acerca de cuál es el proceso de interpretación de una gráfica, cuál es la relación que tiene con las expresiones algebraicas y con la situación que modela.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido 7	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

ACUÉRDATE DE...

1. Analicen la siguiente situación y realicen lo que se pide
   a) Al lanzar un dado, se dan tres condiciones que se consideran favorables, la primera es *A*, que en la cara superior salga un número 6, la segunda, *B*, que salga un 3 o un 5 y la tercera, *C*, es que salga cualquier número par.
   - ¿Cuál es la probabilidad de *A*? $\frac{1}{6}$ ¿Cuál es la de *B*? $\frac{1}{3}$
   - ¿Cuál es la de *C*? $\frac{1}{2}$
   - El que ocurra alguno de estos tres eventos, ¿influye en alguno de los otros o son independientes entre sí? Sí influye Expliquen su respuesta. Si ocurre el evento A también ocurre el evento C.
   - Si al hacer el primer lanzamiento decimos que ocurrió el evento *A*, ¿en qué altera a los otros eventos? Al B no lo altera, pero hace que se cumpla el evento C.
   - Si decimos que ha ocurrido *B*, ¿algún evento se vio alterado? No
     ¿Por qué ocurrió esto? Porque las condiciones de B no afectan a A o a C, es decir, el que ocurra es independiente de los otros dos eventos.
   - ¿Cómo describirían la diferencia entre lo que ocurre, si al hacer el lanzamiento ocurre *A* o *C* en comparación a si ocurre *B*? Los eventos A y C están relacionados por una condición, en cambio el evento B no tiene ninguna relación con los otros dos.
2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor concluyan cuáles son las condiciones que permiten determinar la ocurrencia de dos eventos independientes.

PRACTÍCALO

Actividad 7.1

1. Discutan las siguientes situaciones y, con base en sus opiniones, contesten las preguntas.
   a) El profesor de Física quiere aplicar una pequeña evaluación de lo que se vio en la clase de hoy, para ello elaboró un cuestionario con 4 preguntas de opción múltiple, cada una de ellas tiene 5 respuestas distintas.
   - Suponiendo que un alumno responde totalmente al azar las 4 preguntas, ¿cuál consideran que es la probabilidad de que acierte las 4 respuestas correctas? $\frac{1}{5}$
     Justifiquen su respuesta. Porque son 4 respuestas correctas de 20 opciones.
   - ¿Cuál será la probabilidad de que al responder totalmente al azar apruebe el examen? $\frac{3}{20}$
   - Expliquen su respuesta. Para aprobar el examen debe obtener al menos 3 de las 4 preguntas.
   - ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar las respuestas? Se puede calcular haciendo operaciones o bien por un diagrama de árbol.

Qué observar

Aproveche la actividad **Acuérdate de...** para que retome el cálculo de probabilidad clásica, de esta manera se estará preparando para este contenido.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a una de las parejas que al final de la actividad argumente sus respuestas, que den respuesta a los cuestionamientos que surjan de los integrantes del grupo, que explique si se trata de la regla de la suma, del producto o únicamente es el cálculo de una probabilidad simple.

Recursos y materiales

En la página de *Eduteka*, encontrará un dado que le permitirá trabajar el tema con sus alumnos, de ser necesario llévelos a la sala de computación; diseñe una actividad, o permita que ellos la planeen, para que la realicen.

http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Prob/Index.html

Bitácora pedagógica

Qué observar

En esta actividad se presentan dos eventos: que nazca un hombre o una mujer, por lo que las probabilidades pueden ser iguales para ambos sexos.

Verifique que los alumnos pueden diferenciar si este evento es incluyente o excluyente, así como las características de cada uno.

Cómo enriquecer la actividad

En esta actividad se tienen dos probabilidades de eventos independientes; sin embargo, se aplica la regla del producto para conocer las probabilidades y responder a cada cuestionamiento. Pida a los alumnos que justifiquen cada una de sus respuestas y por qué no se aplica la regla de la suma y sí la regla del producto.

Curiosidades, acertijos y más

Sumerios y asirios utilizaban un hueso extraído del talón de animales, ciervos, ovejas, caballos, al cual llamaban astrágalo o talus, y lo tallaban para que pudiera caer en cuatro posiciones, por lo que son considerados los precursores de los datos.

Matemáticas 3. Por competencias

b) En una clínica de maternidad nacerán 3 bebés el día de hoy, de todas las posibilidades existentes, ¿qué probabilidad consideran que tiene el que pase alguno de estos tres eventos?

- Que nazca primero una mujer y luego dos hombres. $\frac{1}{8}$
- Que nazcan primero dos hombres y luego una mujer. $\frac{1}{8}$
- Que nazca primero un hombre, luego una mujer y al final otro hombre. $\frac{1}{8}$
- ¿Qué procedimiento utilizaron para encontrar las respuestas anteriores? Para aprobar el examen debe obtener al menos 3 de las 4 preguntas.
- ¿Consideran que estas situaciones plantean eventos que dependen entre sí para que ocurran, o son totalmente independientes? Son independientes ¿Por qué? Porque la ocurrencia de alguno de ellos no afecta en nada a los otros dos.

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor comenten algunas de las estrategias empleadas y concluyan si fueron adecuadas y permitieron obtener los resultados correctos.

PRACTÍCALO **Actividad 7.2**

1. En un municipio del Estado de México tienen para su seguridad, carros de bomberos y ambulancias. Actualmente, si se requiere un carro de bomberos, la probabilidad de que esté disponible es $\frac{49}{50}$ y si se necesita una ambulancia, la probabilidad de que esté disponible es $\frac{23}{25}$.

   a) Suponiendo que ocurre una emergencia donde se requiera que esté disponible una ambulancia y un carro de bomberos al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que sí estén disponibles? $\frac{1127}{1250}$

   - ¿Qué operación realizaron para encontrar este resultado? Multiplicando la probabilidad de cada uno de los eventos.
   - ¿Estos eventos son independientes entre sí o uno depende del otro? Son independientes

     Expliquen su respuesta. El que esté disponible alguno de los vehículos no depende de que el otro esté o no disponible.
   - Al investigar la probabilidad de que dos condiciones se den simultáneamente, ¿la probabilidad aumenta o disminuye? Disminuye ¿Por qué ocurre esto? Es menos probable que dos eventos ocurran al mismo tiempo, es más probable que ocurra cualquiera de ellos de manera independiente.
   - ¿Cómo expresarían la probabilidad de que estén disponibles los dos vehículos en número decimal? 0.9016 ¿Qué operación realizaron? División Por lo tanto, ¿cuál es el porcentaje? 90.16 %

2. Comparen sus resultados con los de algunas parejas cercanas y con la ayuda del profesor determinen cómo es más conveniente expresar e interpretar la probabilidad de ocurrencia de dos eventos, como número racional, número decimal o en porcentaje; y cómo es posible obtener la probabilidad de ocurrencia de que se den dos eventos independientes de manera simultánea.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

PRACTÍCALO

Actividad 7.3

Hasta ahora has analizado eventos que no llevan alguna alteración previa, sin embargo, existe la posibilidad de que algún evento no lo sea.

1. Reflexiona y responde las preguntas.
   a) Suponiendo que una moneda se alteró de manera que el anverso tenga el doble de posibilidades de salir que el reverso.
      - ¿Consideras que si se va a lanzar una moneda entre dos personas que saben de esta condición, pueden hacer una predicción justa del posible resultado al lanzar una vez la moneda? No

        ¿Por qué? Porque si ambas personas saben de la condición, saben que no es un lanzamiento justo y es muy posible que realicen la misma predicción.
      - ¿Esta condición se altera si en vez de hacer un lanzamiento se realizan al menos 3? No

        Justifica tu respuesta. Todos los lanzamientos que se realicen no van a cambiar la condición de que el anverso tenga el doble de posibilidades de salir.
      - Si se realizan 3 lanzamientos, ¿cuál es la probabilidad de que se obtengan dos veces el anverso y una vez el reverso? $\frac{4}{9}$ ¿Cómo calculaste este resultado?

        Por medio de un diagrama se pueden determinar el total de posibilidades y señalar las que son favorables.
      - De todos los posibles resultados, ¿cuáles son los favorables? $\frac{12}{27}$
      - ¿Consideras que estos eventos son independientes entre sí? Sí

        Explica tu respuesta. Porque el resultado de cada lanzamiento no depende del lanzamiento anterior.

2. Compara tus resultados con los de algunos de tus compañeros y con la ayuda del profesor determina cuál es el algoritmo adecuado para obtener la probabilidad cuando se relacionan entre sí varios eventos.

PRACTÍCALO

Actividad 7.4

1. A continuación se muestran tres situaciones, analicen cada una y respondan las preguntas.
   a) Lanzar dos dados al mismo tiempo.
      - ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas caras salga el mismo número? $\frac{1}{6}$
      - ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas caras salga un 3? $\frac{1}{36}$
      - ¿Cuál es la probabilidad de que en un solo dado caiga 3? $\frac{5}{36}$
      - Entonces, al lanzarlos juntos, ¿qué operación permite conocer la probabilidad de que en ambos caiga 3?

        $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
      - ¿Afecta en algo la probabilidad de uno de los dados al otro? No
      - ¿Por qué ocurre esto? El resultado de uno no depende del resultado del otro.
      - ¿Cuál es la probabilidad de que ambas caras sumen 7? $\frac{1}{6}$
      - ¿Cuál es la probabilidad de que caigan números iguales y además sumen 8? $\frac{1}{36}$
      - ¿Cuáles eventos de los mencionados anteriormente se pueden considerar independientes? El tercero
      - Justifiquen su respuesta. Solo considera un dado, el otro es independiente.
   b) Lanzar un dado y una moneda al mismo tiempo.
      - ¿Cuál es la probabilidad de que caiga 6 y cruz? $\frac{1}{2}$
      - Si primero tiran el dado y cae 6, y luego la moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga cruz? $\frac{1}{2}$

159

Qué observar

Una manera de obtener la probabilidad sin utilizar la regla del producto, es la realización de un diagrama de árbol, el cual permitirá comprobar que la probabilidad es correcta. La regla del producto facilita este trabajo, al multiplicar con conjuntos que se encuentran en un evento.

Cómo enriquecer la actividad

Antes de efectuar la actividad, pida al grupo que reflexione cuál sería la respuesta a los cuestionamientos; una vez hechos los comentarios, que lleven a cabo la actividad para comprobar sus inferencias.

Reflexión

Invite a los alumnos a reflexionar la siguiente frase.

"Los estudiantes tienen la energía, la imaginación y la inteligencia necesaria para mejorar la situación en sus comunidades. Lo único que necesitan es que se les pida que demuestren lo que pueden hacer."

Katheleen Kennedy.

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

- Si primero tiran la moneda y cae cruz, y luego el dado, ¿cuál es la probabilidad de que caiga 6? $\frac{1}{2}$
- Si sólo se lanza el dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número impar y mayor que 3? $\frac{1}{6}$
- Si al lanzar un dado ya se sabe que salió un número mayor que 3, ¿qué probabilidad hay de que sea impar? $\frac{1}{6}$
- ¿Cuál de los eventos mencionados anteriormente son independientes? Lanzar un solo dado
- ¿Cuáles eventos son dependientes? Lanzar una moneda (caiga cruz) y luego el dado (caiga 6).

c) Extraer dos fichas al azar de un contenedor que tiene 3 fichas marcadas con el número 1, dos fichas marcadas con el número 2 y cuatro fichas marcadas con el número 3.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al mismo tiempo Ramiro saque una ficha marcada con 1 y Lucía otra con un 2? $\frac{2}{27}$
- Si regresan las fichas que tomaron y nuevamente saca cada uno una ficha, ¿cuál es la probabilidad de que Ramiro saque una marcada con el número 2 y Lucía una marcada con el número 3? $\frac{8}{81}$
- ¿Estos eventos son independientes entre sí? No
  Justifiquen su respuesta. Porque ocurren al mismo tiempo, lo que afecta la probabilidad del otro.

2. Comparen sus resultados con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor concluyan cómo se determina si dos eventos son independientes entre sí y cómo se calcula la probabilidad de ocurrencia de estos eventos.

Para leer más

Recuerda que dos eventos son independientes cuando no afectan entre sí su probabilidad de ocurrencia, y su probabilidad puede calcularse mediante la regla del producto. Recuerda que dos eventos son independientes cuando no afectan entre sí su probabilidad de ocurrencia, y su probabilidad puede calcularse mediante la regla del producto. Matemáticamente esta regla, según la teoría de la probabilidad, indica que *la probabilidad de que se produzcan los sucesos A y B como producto de la probabilidad del suceso A por la probabilidad de que ocurra B cuando se conoce que ha ocurrido A* (A esto se le llama también probabilidad condicionada). Y su notación es:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(\tfrac{B}{A})$$

El símbolo ∩ (intersección) en este caso indica que se producen los sucesos A y B.

Si éstos son independientes, es decir si la probabilidad de uno de ellos no depende de que haya sucedido el otro, entonces:

$$P(\tfrac{B}{A}) = P(B)$$

Por lo que la regla del producto queda de la siguiente manera:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \times P(B)$$

Es muy importante que sepas interpretar este tipo de expresiones matemáticas; pide ayuda a tu profesor para que te oriente en cuanto a cómo se debe leer para poder entenderla con facilidad.

Para tener en cuenta

Cuando se tienen varios eventos que son independientes entre sí, la manera de calcular la probabilidad de que ocurran todos ellos, se realiza por medio de una multiplicación de la probabilidad que cada uno de estos eventos representa. A esto se le conoce como la *regla del producto.*

Qué observar

Dé un tiempo prudente para que el alumno lea la información que se presenta en este apartado, que la analice y verifique que la puede explicar con sus propias palabras.

Cómo enriquecer la actividad

Si los alumnos presentan dudas en la comprensión del texto por la simbología utilizada, puede pedir que la investiguen, o en su caso explíqueles por medio de ejemplos concretos.

Transversalidad

Geografía de México y del mundo

En Geografía, en la parte de meteorología, se puede pronosticar un día con lluvia y granizo, esta probabilidad se debe a los cambios constantes de la dinámica atmosférica.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

LO QUE APRENDÍ

1. En la siguiente tabla están los números que representan los puntos en las fichas del juego de dominó.

Fichas de dominó

	0	1	2	3	4	5	6
0	0, 0						
1	0, 1	1, 1					
2	0, 2	1, 2	2, 2				
3	0, 3	1, 3	2, 3	3, 3			
4	0, 4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4		
5	0, 5	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	
6	0, 6	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una ficha al azar sea (6, 6)? $\frac{1}{28}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una ficha la suma de sus cantidades sea 8? $\frac{3}{28}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea una ficha con dos números iguales? $\frac{7}{28}$
- ¿Cuál será la probabilidad de que al sacar una ficha contenga un 6 y además la suma de sus puntos dé un número par? $\frac{1}{7}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una ficha la suma de sus puntos sea 7 y a su vez esté formada por un número par y uno impar? $\frac{3}{28}$

2. Compara tus respuestas con las de algunos compañeros y con la ayuda del profesor determina cuál es la importancia de la observación y la deducción en el análisis de una situación de probabilidad donde se trabaja con más de dos eventos que pueden ser excluyentes o no entre sí.

Desarrolla tus habilidades

1. En un paquete de franelas hay cuatro de color blanco y tres de color negro, y en otro paquete hay tres franelas blancas y cinco negras, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer una franela de cada paquete ambas sean de color negro?
2. Describe el planteamiento que realizaste y las operaciones que te permitieron calcular la probabilidad. $\frac{3}{7}$ es la probabilidad del primer evento, $\frac{5}{8}$ es la del segundo, si se multiplican se obtiene $\frac{15}{56}$.

USA LAS TIC

Si quieres aprender más acerca de la regla del producto visita la página http://carmesimatematic.webcindario.com/probabilidadII.htm (Consultada el día 19 de marzo de 2013, a las 21:11 horas), donde encontrarás información teórica y ejemplos. Después de tu visita elabora un comentario con tu opinión acerca del contenido y los ejemplos y compártelo con tu profesor.

Qué observar

Esta actividad está diseñada para que el alumno aplique lo que ha aprendido en este contenido.

Verifique que el alumno comprende que la regla del producto se aplica si y sólo si dos eventos son independientes y que la probabilidad de que ocurra uno de ellos no afecta a la probabilidad del otro.

Cómo enriquecer la actividad

Mediante una serie de cuestionamientos pida a los alumnos, si en esta actividad se aplica la regla del producto y si son eventos independientes. Solicite que justifiquen cada una de sus respuestas.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

En Ciencias 1, Biología se ven temas como la reproducción sexual de especies; sin embargo, la probabilidad de que se lleve a cabo la fecundación depende de varios factores biológicos como son la edad, la salud, etc., de las especies, de esta forma la probabilidad de que la especie perdure en el espacio y tiempo se incrementa.

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

Evaluación tipo PISA

1. Analiza la imagen mostrada y los datos que contiene, y responde.

   a) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite encontrar la medida de las dimensiones del rectángulo?

   $x^2 + 4x + 21 = 0$

   b) ¿Cuál de las siguientes opciones indica las dimensiones correctas del rectángulo?

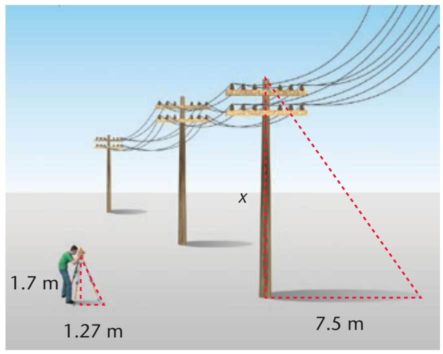
a) 6 cm de base y 4 de altura
b) 7 cm de base y 5 de altura
c) 8 cm de base y 3 de altura
d) 12 cm de base y 2 de altura

2. Un ingeniero está midiendo la altura de un poste, para ello, él sabe que la sombra que proyecta es de 7.5 m y está tomando como referencia la altura de su tripié de 1.7 m, que proyecta una sombra de 1.27 m.

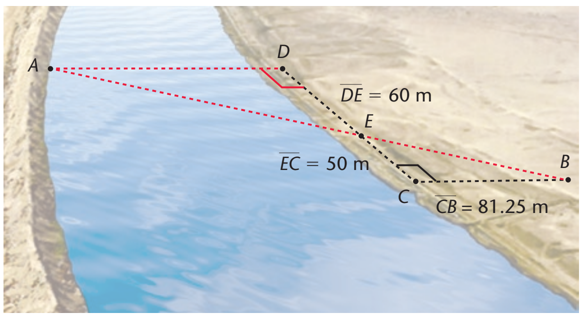
   a) ¿Cuánto mide la altura del poste? 10.03 m = 0

   b) De las siguientes proporciones, ¿cuál permite obtener la altura del poste? La "c"

a) $\frac{1.27\text{ m}}{x} = \frac{1.7\text{ m}}{7.5\text{ m}}$
b) $\frac{1.27\text{ m}}{1.7\text{ m}} = \frac{x}{7.5\text{ m}}$
c) $\frac{1.7\text{ m}}{1.27\text{ m}} = \frac{x}{7.5\text{ m}}$
d) $\frac{7.5\text{ m}}{1.27\text{ m}} = \frac{1.7\text{ m}}{x}$

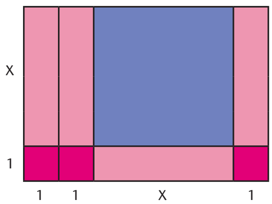


3. Analiza el esquema y determina.



Cómo enriquecer la actividad

En la primera pregunta trace la siguiente imagen para que el alumno responda las preguntas.



Dé oportunidad a que los alumnos expongan sus ejercicios, al mismo tiempo sus compañeros deben estar dispuestos a revisar su propio ejercicio y a evaluarse.

Permita el intercambio de ideas y de experiencias que apoyen a los alumnos que han cometido algunos errores.

Recapitule el desempeño y analice si los procesos de enseñanza-aprendizaje están dando los resultados deseados.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 3

Evaluación tipo PISA

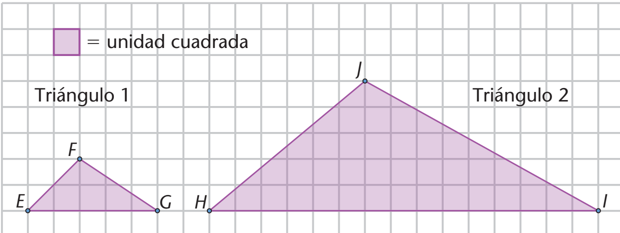
a) ¿Cuánto mide el ancho del canal de Suez ($\overline{AD}$)?

a) 97.5 m	c) 125.8 m
b) 70.25 m	d) 85.7 m

b) ¿Quién fue el matemático que enunció el teorema que dice: "Si varias paralelas cortan a dos transversales, se forman entre ellas segmentos correspondientes proporcionales"? Tales de Mileto

4. Explica, ¿cómo se obtiene la razón de semejanza entre dos figuras? Obteniendo el cociente de los lados proporcionales correspondientes entre ambos triángulos.

a) Analiza la imagen y determina, ¿cuál es la razón de semejanza? $r = 3$



5. Una caja para jabón de tocador mide 2 cm de altura y su largo es 3 cm mayor que su ancho. Si su volumen es 80 cm^3, cuáles son las dimensiones del largo y del ancho? 5 de largo y 8 de ancho.

a) ¿Cuál de las siguientes expresiones modela esta situación? Encierra en un círculo un "Sí" o "No" para cada una.

a) La expresión algebraica es $2x^2 + 6x - 80 = 0$, el largo se expresa como x y el ancho es $x + 3$.	Sí	No
b) La expresión algebraica es $2x^2 - 6x - 80 = 0$, el largo se expresa $x - 3$ como y el ancho es x.	Sí	No
c) La expresión algebraica es $2x^2 + 6x + 80 = 0$, el largo se expresa como $3 + x$ y el ancho es x.	Sí	No
d) La expresión algebraica es $2x^2 - 6x + 80 = 0$, el largo se expresa como $3 - x$ y el ancho es $x + 3$.	Sí	No

6. De los eventos indicados, ¿qué incisos contienen eventos independientes?

a) Lanzar un dado en dos ocasiones y esperar que en el primer tiro salga un número par y en el segundo un impar.
b) Lanzar un dado en dos ocasiones para obtener un número par en cada lanzamiento.
c) Lanzar dos veces un dado y esperar que caiga un 3 en el primer lanzamiento y en el segundo un múltiplo de 3.
d) Lanzar un dado a un mismo tiempo y esperar que si cae un número menor que 2 en un dado y en el segundo caiga un número par.

Cómo enriquecer la actividad

Siempre que sea necesario, y el tiempo lo permita, retome los contenidos en los que el alumno no ha alcanzado la competencia esperada.

No se trata de repetir esquemas, busque otras estrategias que sean congruentes con las formas de aprender de los alumnos, y que probablemente difieran de las suyas.

Bitácora pedagógica

Bloque 4

Aprendizajes esperados:

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

A las gráficas de las funciones seno y coseno se las considera ondas senoidales. El estudio de las funciones senoidales permite entender la naturaleza de muchas ondas que se encuentran a nuestro alrededor, por ejemplo en un electrocardiograma o en mareas oceánicas.

164

Qué observar

Comente los aprendizajes esperados, analícelos frente al grupo y procure que los alumnos tengan una idea concreta de lo que se pretende lograr con el estudio del bloque 4.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que realice una lluvia de ideas referente a los conocimientos que ya tienen y reflexionen cómo pueden utilizar su libro para consultar los temas vistos anteriormente, y que tienen relación con estos contenidos, de esta manera el alumno ya estará preparado para revisar los temas anteriores.

Contexto histórico

1614
Miguel de Cervantes Saavedra escribe la obra *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha.*

1637
Anton van Leeuwenhoek perfecciona el microscopio.

1699
Thomas Savery patenta la primera máquina de vapor.

1776
Se declara la Independencia de los Estados Unidos de Norte América.

1789
Inicio de la Revolución Francesa.

Hechos matemáticos

1614
John Napier descubre los logaritmos.

1654
Blaise Pascal y Pierre Fermat desarrollan estudios acerca de la probabilidad.

1680
Sir Isaac Newton inventa el cálculo infinitesimal, realiza aportaciones acerca de la gravitación, series e hidrodinámica.

1733
Giovanni Geloramo Saccheri cuestiona la veracidad del quinto postulado de Euclides.

165

Qué observar

Es importante que los alumnos aprendan a ubicar los hechos históricos con el desarrollo de las Matemáticas. Observe que analicen la línea de tiempo y comparen los sucesos históricos con los hechos matemáticos.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que los alumnos busquen algunos hechos históricos que complementen la línea del tiempo, pueden hacerlo en su cuaderno e incluso pedir la asesoría de su profesor de Historia, con esto estarían también valorando la transversalidad de estos hechos desde el punto de vista de otra asignatura.

Qué observar

Vigile que los alumnos comprenden la situación planteada que ellos mismos construyan la fórmula que les permita definir el enésimo término de una sucesión, así como la expresión algebraica que la representa.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que justifiquen verbalmente sus respuestas y destaquen cuál es la diferencia en la secuencia entre el número de cuadros y el número de cerillos que se utilizan, una vez que tengan la fórmula pida que la lean con un lenguaje común y que justifiquen por qué es necesario realizar la resta de −1.

Recursos y materiales

En la página de Telesecundaria encontrará un interactivo que le permitirá abordar este tema con sus alumnos.

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b04_t01_s01_descartes/index.html

Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido 1	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

ACUÉRDATE DE...

1. En su curso de Matemáticas de segundo grado aprendieron a encontrar una expresión algebraica que permite conocer cualquier término de una sucesión. Para recordar ese procedimiento examinen la situación dada y respondan las preguntas.

   a) Con la intención de construir modelos geométricos móviles, el maestro de matemáticas de la escuela de Laura utilizó cerillos. Analicen el modelo y registren debajo de cada uno el número de cuadrados que se forman y la cantidad de cerillos que se utilizaron.

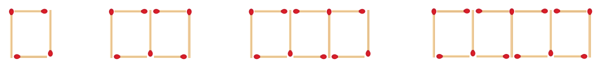


	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
Número de cuadrados	1	2	3	4
Número de cerillos	4	7	10	13

- Siguiendo esta forma, ¿cuántos cuadrados tendrá la siguiente figura? 5
  ¿De cuántos cerillos estará formada? 16
- ¿Cuántos cuadrados tendrá la octava figura? 8
  ¿De cuántos cerillos estará formada? 25
- ¿Qué procedimiento utilizaron para determinar estos resultados? Por conteo
- ¿Cuál es la regla que hay que seguir para obtener una figura a partir de la anterior?
  Sumarle 3 aristas para formar el siguiente cuadro.
- Siguiendo el mismo patrón hasta la décima figura, ¿cómo se puede determinar la cantidad de cuadrados que se formarán y la de cerillos que se emplearán?
  Número de cuadrados = 10 y número de cerillos = 31.
- ¿Cuál es la fórmula que permite encontrar cualquier término de esta sucesión? $x_n = x_1 + (x - 1)d$
  Donde x_n = número de cuadros, x_1 = número de cerillos y d = diferencia en la serie.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la sucesión con base en el número de cerillos con que se forma cada figura? $x_n = 3x + 1$
- Escriban en su cuaderno las operaciones que realizaron.
- ¿Cómo pueden comprobar que esta expresión es correcta? Realizando el dibujo correspondiente. para el número de cuadros que se desea representar.
- ¿Cuál es el número necesario de cerillos para formar una figura con 15 cuadros? 46
  Justifiquen su respuesta. Utilizando la expresión algebraica obtenida anteriormente.

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, con la ayuda del profesor, verifiquen que su fórmula sea la adecuada, en clase, redacten una síntesis de las características de estas sucesiones, diseñen una sucesión propia, similar a la de esta actividad y comprueben sus resultados.

Bitácora pedagógica

PRACTÍCALO

Actividad 1.1

1. Analicen la siguiente sucesión basada en una construcción triangular hecha con cerillos.

a) El profesor de Laura presentó esta secuencia en clase, para que el grupo la comparara con la planteada anteriormente. Escriban sobre las líneas indicadas en la imagen, la cantidad de triángulos formados y el número de cerillos utilizados para cada figura, después contesten las preguntas.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

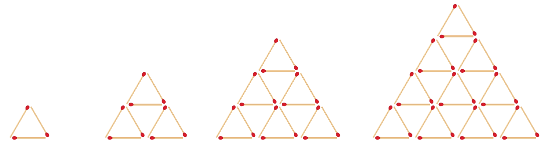


	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
Número de triángulos	1	4	9	16
Número de cerillos	3	9	18	30

- ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de triángulos de la figura 2 y la figura 1? 3
  ¿Qué diferencia existe entre la figura 3 y la figura 2? 5
  ¿Y entre la 4 y la 3? 7
- ¿Cuál es la diferencia entre estos tres resultados? 2
- ¿De qué manera consideran que pueden ser útiles estas cantidades? Al obtener estos resultados nos dimos cuenta que podemos utilizar el método de las diferencias.
- Si se continúa con esta forma en la construcción de las figuras, ¿cuál es la cantidad de triángulos que se formarán en la figura 5? 25 ¿De qué manera determinaron el resultado? Primero se hizo el dibujo y después por conteo.
- ¿Qué estrategia utilizarían para conocer la cantidad de triángulos que se forman para las figuras consecutivas 6, 7 y 8? Podemos observar que el número de triángulos formados es igual a la posición elevada al cuadrado de lo que obtendremos 36, 49, 64 respectivamente.
- ¿Cómo determinarían la cantidad de triángulos formados para la figura 15? Elevando el 15 al cuadrado donde obtenemos 225 triángulos formados para dicha figura.
- ¿De qué manera pueden elaborar una expresión algebraica que represente un número *n*, es decir, cualquier figura de esta sucesión? Utilizando el método de diferencias.
- ¿De qué grado es la expresión que plantearon? Es una expresión de segundo grado.
  ¿Por qué ocurrió esto? Porque el máximo exponente de la expresión es dos.
- ¿Cómo pueden comprobar si la expresión algebraica es correcta o no? Dibujando las figuras y después contar los cerillos.
- ¿Cuántos triángulos se formarán en la figura 40? 1600

b) Sobre el número de cerillos con los que se formaron las figuras:

- ¿Cuántos cerillos se necesitan para crear la figura 5? 45 ¿Cómo determinaron esta cantidad? Obteniendo una expresión algebraica mediante el método de diferencias.

Qué observar

Verifique que los alumnos son capaces de deducir los resultados correctamente, para concluir cuál es la aplicación del método de diferencias.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que comenten en grupo cuál consideran que es la conveniencia de utilizar una expresión algebraica para calcular cualquier término de una sucesión, así como cuál es el procedimiento para poder hacerlo. Recuerde que una buena estrategia de aprendizaje es que el alumno explique los procedimientos y planteamientos que acaba de aprender.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

Para conocer la abundancia de especies que se encuentran en una zona territorial determinada, se utiliza la técnica de cuadrantes, en la cual el conteo de especies y el tipo que se presenta se puede determinar a través de una estimación en un área mayor aplicando la expresión $y = ax^2$, de esta forma el área aumenta y se realiza una estimación de las especies de plantas que se pueden llegar a encontrar.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Ponga especial atención en el planteamiento de la expresión algebraica y verifique que el alumno siente la seguridad de usar los procedimientos aritméticos que ya conoce para auxiliarse de ellos al momento de determinar la expresión algebraica.

Cómo enriquecer la actividad

Destaque la importancia de la cuadrícula para conocer la cantidad de líneas y cuadros que aumentan en cada figura, ésta es una buena oportunidad para enfatizar la diferencia entre las unidades lineales y las unidades cuadradas, cómo se modifican para cada secuencia y que comprendan la diferencia en los resultados cuando se operan cantidades de una sola dimensión y cantidades de dos dimensiones.

Curiosidades, acertijos y más

De quadratis numeris, fue otra de las obras que publicó Fibonacci en 1225; sin embargo, estaba tan avanzado para su época, que se tuvo que esperar a Fermat (en el siglo XVII) para que fuera superado.

- ¿De qué manera pueden determinar la cantidad de cerillos necesaria para construir las figuras 6, 7 y 8? Utilizando la misma expresión que obtuvimos en la respuesta anterior.

  ¿Es la misma estrategia que usaron para encontrar el número de triángulos? Sí

  ¿Por qué ocurrió esto? El método aplica para cualquier serie dada y en este caso puede ser representada por una expresión de segundo grado.

- ¿Cómo determinarían la cantidad necesaria de cerillos para formar la figura 15? Utilizando la expresión $x_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$ sustituyendo el 15 obtenemos 360 que es el número de cerillos para realizar la figura número 15.
- En este caso, ¿cuál es la expresión algebraica que proponen que permita obtener la cantidad de cerillos necesaria para representar cualquier figura n? $x_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$
- ¿De qué grado fue la expresión que plantearon? Una expresión de segundo grado.
- ¿Fue del mismo grado que la expresión para el número de triángulos? Sí
- ¿Por qué ocurrió esto? Del mismo modo, el máximo exponente de la expresión es dos.
- ¿Cómo pueden comprobar si esta expresión algebraica es correcta? Haciendo el dibujo de la figura correspondiente y contando uno por uno.
- ¿Cuántos cerillos se necesitarán para formar la figura 40? 2460

2. Comparen sus respuestas con las de algunos equipos y comenten en grupo las estrategias que utilizaron para dar respuesta a las preguntas, analicen las expresiones algebraicas planteadas y determinen cuál consideran que es la más adecuada. También expliquen si es que consideran que hay alguna otra estrategia para resolver situaciones como estas.

PRACTÍCALO **Actividad 1.2**

1. Reflexionen sobre la situación planteada y contesten las preguntas.

   a) El profesor de matemáticas pidió a sus alumnos que elaboraran un diseño único. Propuso que los hicieran coloreando los cuadros de su cuaderno; Laura realizó el que se muestra en la imagen. Escriban sobre las líneas las medidas correspondientes a la base, la altura y el área de cada rectángulo, después contesten las preguntas.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

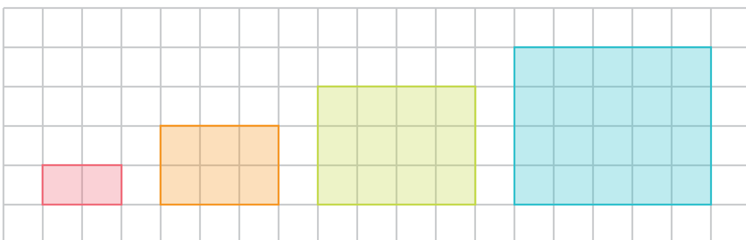


	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
Base	2	3	4	5
Altura	1	2	3	4
Área	2 u^2	6 u^2	12 u^2	20 u^2

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

- Si Laura continúa con este mismo diseño, ¿cuántas unidades cuadradas tendrá la figura 5? 30
- ¿De qué manera se obtiene este resultado? Dibujando la siguiente figura y con la fórmula para obtener el área de un rectángulo.
- ¿Cuál es la sucesión numérica para las bases de los primeros 5 rectángulos? 2, 3, 4, 5, 6
- ¿Cuál es la sucesión numérica para las alturas de los primeros 5 rectángulos? 1, 2, 3, 4, 5
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la sucesión de las bases? $n + 1$
- ¿Cuál es la expresión algebraica para la sucesión de las alturas? n
- ¿Cuál es la diferencia entre ellas? Que el número de lal bases empieza en 2 y el de las alturas empieza en 1.
- ¿Cuál es la sucesión numérica para las áreas de los rectángulos? 2, 6, 12, 20, 30
- ¿Qué expresión algebraica proponen para que represente esta sucesión? $x = (n)(n) + n$
- ¿Tiene el mismo exponente que las dos expresiones anteriores? No
- ¿Por qué ocurre esto? Porque el máximo exponente de la expresión es dos.
- ¿Qué procedimiento o estrategia deben seguir para calcular las dimensiones y el área de la figura 10? Utilizando las expresiones algebraicas obtenidas anteriormente.
- ¿Cuál es la regla que permite encontrar el área para cualquiera de las figuras? Descríbanla. $x = n^2 + n$
- ¿Cómo pueden comprobar que la regla que describieron es correcta? Utilizando las expresiones algebraicas obtenidas anteriormente.

b) Tomen como base la sucesión correspondiente al área de los rectángulos y regístrenla en la tabla en la primera fila, luego, en la segunda fila, obtengan la diferencia entre cada número y su antecesor, y en la tercera columna repitan esta operación para los números obtenidos en la segunda fila.

	1	2	3	4	5
Sucesión:	2	6	12	20	30
Diferencias de la sucesión original:	4	6	8	10	
Diferencias de los resultados obtenidos:	2	2	2		

- ¿Qué tienen de distinto la sucesión original y la segunda sucesión obtenida a partir de sus diferencias? Al obtener la sucesión original podemos observar que se trata de una ecuación de segundo grado y la segunda sucesión se trata de una ecuación de primer grado.
- ¿Qué ocurrió con los números de la última fila? Son iguales
  ¿Por qué? Al sacar la primer diferencia de la sucesión original se obtiene una ecuación de primer grado y al sacar la segunda diferencia se vuelve una constante.
- ¿Qué utilidad pueden tener estas diferencias? Nos ayudan a obtener un sistema de ecuaciones ayudándonos a sacar la expresión algebraica para cualquier figura n.

2. Comparen sus respuestas con las otras parejas y con ayuda de su profesor, demuestren la veracidad de sus expresiones algebraicas, determinen las que consideren que son mejores y propongan una nueva estrategia para resolver este tipo de situaciones.

Qué observar

Es posible que los alumnos tengan algunas complicaciones al utilizar en una expresión algebraica, otra de segundo grado junto con una de primer grado. Verifique que comprenden el porqué de esta situación y que saben definir cuál es el significado en la expresión algebraica que modela esta situación.

Cómo enriquecer la actividad

Puede elaborar previamente sucesiones similares a esta y pedir a los alumnos que encuentren las características similares, como la que se muestra en el libro. También resalte las diferencias de esta situación con la que se analizó en la sección pasada.

Reflexión

Pida a los alumnos que reflexionen acerca del siguiente pensamiento de Carl Friedrich Gauss.

"No es conocimiento, sino el acto de aprendizaje, y no la posesión, sino el acto de llegar allí, que concede el mayor disfrute."

Bitácora pedagógica

Qué observar

Estas secciones pueden ser muy útiles para desarrollar algoritmos, verifique que el alumno los realiza de manera segura y que conoce el porqué se utiliza de esta manera.

Cómo enriquecer la actividad

Recuerde con el grupo cuál es la forma de una expresión cuadrática y lo que representan los valores de a, b y c.

Relaciónelos con los coeficientes o términos independientes y con las expresiones algebraicas dadas en esta sección.

Reflexión

"Cada acto de aprendizaje consciente requiere la voluntad de sufrir una lesión en la propia autoestima. Es por ello que los niños pequeños antes de ser conscientes de su autoestima, aprenden más fácilmente."

Thomas Szasz.

PRACTÍCALO **Actividad 1.3**

1. Diseñen su propia expresión cuadrática, encontrando una sucesión y a partir de esta última, establezcan nuevamente la expresión cuadrática que plantearon originalmente.
   a) Diseñen una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c$. Escríbanla. $n^2 + 3n + 1$
   b) Utilicen los números naturales a partir del 1 para sustituir los valores en su expresión y encuentren los primeros 5 términos de la sucesión. Regístrenlos. 5, 11, 16, 29, 41
   c) Tomen la sucesión y apliquen el método de diferencias para encontrar la expresión algebraica original.
   ¿Coincidió con la que ustedes plantearon? Sí
   ¿Por qué ocurrió esto? Al realizar el método de diferencias es como hacer una comprobación del resultado obtenido en las sustituciones efectuadas.
   d) Determinen cuál es el valor de y cuando n vale 15? 271
   e) Ahora seleccionen un valor superior a 20, calculen el valor de y, a partir de éste demuestren el valor que le dieron a n. $n = 21$ de esto obtenemos 505 de tal manera que pertenece a la misma tabla y gráfica de dicha expresión.
2. Comparen su trabajo con el de otros equipos y con su profesor, verifiquen que tanto sus estrategias como operaciones sean correctas. Repitan esta actividad en su cuaderno de manera individual y propongan sucesiones nuevas.

PRACTÍCALO **Actividad 1.4**

1. Observa la siguiente serie de sucesiones esquematizadas que te servirá para aprender a aplicar el método de diferencias.
   a) Dada la sucesión 6, 15, 28, 45, 66…, ubícalos en el siguiente arreglo y completa los datos que faltan para obtener la sucesión de primer grado a partir de sus diferencias y que, a su vez, éstas te permitan obtener el valor constante.

		1	2	3	4	5
Sucesión ordenada:	$a + b + c =$	6	15	28	45	66
Diferencias de la sucesión original:	$3a + b =$	9	13	17	21	
Diferencias de los resultados obtenidos:	$2a =$	4	4	4		

   - ¿Cuál de estas tres expresiones algebraicas es posible resolver de manera inmediata? $2a = 2$
     ¿Por qué no es posible resolver antes alguna de las otras dos? Porque contienen dos o más incógnitas y no se pueden resolver de manera inmediata.
   - Explica qué estrategia puedes utilizar para encontrar los valores de a, b y c, a partir de las ecuaciones dadas. Resolver las ecuaciones empezando por la tercera, después la segunda y por último resolver la primera y de esta manera obtendremos el valor de a, b y c respectivamente.

   b) Determina los valores de a, b y c.
   $2a =$ 4 $3a + b =$ 9 $a + b + c =$ 6
   - Sustituye estos valores en la expresión $ax^2 + bx + c$ (2)x^2+ (3)x + (1)

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

c) Para comprobar si esta expresión algebraica es correcta para la sucesión 6, 15, 28, 45, 66…, completa la tabla.

x	(2)x^2 + (3)x + (1)	y
1	$2(1^2) + 3(1) + 1$	6
2	$2(2^2) + 3(2) + 1$	15
3	$2(3^2) + 3(3) + 1$	28
4	$2(4^2) + 3(4) + 1$	45
5	$2(3^2) + 3(3) + 1$	66

- ¿Qué valor toma y cuando $n = 20$? $y = 461$
- Si $y = 1326$, ¿qué valor le corresponde a n? $n = 25$
- ¿Cómo obtuviste el resultado? Sustituyendo a y en la expresión algebraica que obtuvimos anteriormente, y después de realizar el despeje correspondiente para poder obtenerlo mediante la ecuación de la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

2. Comparte tus respuestas y procedimientos con algunos de tus compañeros y analiza los que ellos hicieron; elaboren una síntesis que explique de forma breve, cómo se comprueba que la expresión obtenida es correcta. Pide a tu profesor que organice una lluvia de ideas para conocer si alguien propone algún método distinto.

Qué observar

Verifique que los alumnos realizan la sustitución de manera adecuada y que usan correctamente la jerarquía de operaciones. En una tabla, los algoritmos son muy importantes para obtener buenos resultados.

Para tener en cuenta

El método de diferencias está dado por 3 expresiones algebraicas que se relacionan directamente con las sucesiones y las diferencias que derivan de ésta.

Es importante que recuerdes que la forma de una expresión algebraica de segundo grado completa, tiene la forma $ax^2 + bx + c$ y está constituida por un término de segundo grado ax^2, un término de primer grado bx y un término independiente c.

Tu objetivo es encontrar los valores a, b, c para poder sustituirlos en la forma $x^2 + bx + c$ y de esta manera obtener la expresión algebraica que representa la sucesión.

El método es:

1. La expresión $a + b + c$ se iguala al primer término de la sucesión original.
2. La expresión $3a + b$ se iguala con el primer término de la sucesión de primer grado obtenida en las primeras diferencias.
3. La expresión $2a$ se iguala al término constante obtenido a partir de las diferencias de la sucesión de primer grado obtenida anteriormente.

Una vez obtenida la expresión, es posible calcular cualquiera de sus términos (enésimo), simplemente debes sustituir el número progresivo del cual deseas conocer su valor y resolver la operación; por ejemplo, para los valores 1, 2, 3 y n en la expresión $x^2 + x + 1$ son 3, 7, 13 y $n^2 + n + 1$, donde n representa el número.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente analizar los problemas anteriores después de leer esta sección, de esta manera el alumno podrá reafirmar sus conocimientos y adquirir seguridad en los mismos al validar sus conclusiones.

Bitácora pedagógica

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

La diversidad de plantas y animales en el mundo y en México es producto de la evolución. En el caso particular de las plantas, algunas presentan estructuras, ya sea en tallo o en la flor, en forma de sucesiones tanto lineales como cuadráticas, basta con observar al girasol, o algunas cactáceas.

171

Qué observar

Verifique que las operaciones estén bien realizadas y que se relacionen bien con el planteamiento del método de diferencias.

Cómo enriquecer la actividad

Puede solicitar a los alumnos que realicen en su cuaderno una actividad como ésta, donde ellos mismos planteen una expresión de segundo grado completa o incompleta y, a partir de ahí determinen sus coeficientes, como se aprendió en esta sección. La idea es que tengan seguridad en sus procesos y que sean capaces de justificar que están bien y por qué se desarrollaron de esa manera.

Curiosidades, acertijos y más

Fibonacci, en su tratado, escrito en 1202, *Liber abaci (El libro del ábaco)*, en el que trata el sistema numérico indoarábigo, presenta los signos hindúes (1, 2, 3…) y el 0, árabe, donde dice que llama cero *(quod arabice zephirum appellatur)*; que resulta algo insólito para una sociedad que no manejaba el cero en el siglo XIII.

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO **Actividad 1.5**

1. Resuelvan la siguiente actividad.

a) En cada sección de la siguiente tabla se encuentra una expresión cuadrática y debajo de ella un conjunto de valores para la x. Obtengan los valores de las columnas correspondientes a y, con ello podrán formar tres sucesiones con 5 números cada una.

x	x^2	y
1	$(1)^2$	6
2	$(2)^2$	4
3	$(3)^2$	9
4	$(4)^2$	16
5	$(5)^2$	25

x	$2x^2 - 1$	y
1	$2(1)^2 - 1$	1
2	$2(2)^2 - 1$	7
3	$2(3)^2 - 1$	17
4	$2(4)^2 - 1$	31
5	$2(5)^2 - 1$	49

x	$x^2 + 2x + 3$	y
1	$(1)^2 + 2(1) + 3$	6
2	$(2)^2 + 2(2) + 3$	11
3	$(3)^2 + 2(3) + 3$	18
4	$(4)^2 + 2(4) + 3$	27
5	$(5)^2 + 2(5) + 3$	38

b) Con los valores de y formen sucesiones y completen los recuadros obteniendo las diferencias como lo realizaron en la actividad anterior.

	1	2	3	4	5
Sucesión para x^2:	1	4	9	16	25
Diferencias de la sucesión original:	3	5	7	9	
Diferencias de los resultados obtenidos:	2	2	2		

• ¿Cuál es el valor de la diferencia en los resultados obtenidos? __________

	1	2	3	4	5
Sucesión para $2x^2 - 1$:	1	7	17	31	49
Diferencias de la sucesión original:	6	10	14	18	
Diferencias de los resultados obtenidos:	4	4	4		

• ¿Cómo lo determinaron? Sustituyendo los valores numéricos indicados en la expresión dada.

• ¿Cuál es el valor de las diferencias del tercer renglón? __________

	1	2	3	4	5
Sucesión para $x^2 + 2x + 3$:	6	11	18	27	38
Diferencias de la sucesión original:	5	7	9	11	
Diferencias de los resultados obtenidos:	2	2	2		

Bitácora pedagógica

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa los valores de las diferencias de la sucesión original? $3a + b = 5$
- ¿Cómo la determinaron? Realizando la diferencia de los primeros dos números naturales sustituidos en la forma general de una ecuación de segundo grado.
- ¿Cuál es el valor de las diferencias del tercer renglón? 2

2. Analicen sus resultados con algunas otras parejas y examinen los primeros términos de cada renglón con la función de la que provienen y elaboren una **hipótesis** que explique de qué manera consideran que están relacionados.

Glosario

Hipótesis. Es una frase que afirma una suposición que tiene cierto grado de credibilidad, debe ponerse a prueba para verificar su validez y si se cumple se puede convertir en una tesis o teorema confirmado por datos verídicos reales.

Para leer más

Para determinar que una sucesión está basada en una expresión algebraica de segundo grado es necesario observar tres aspectos:

1. No es posible determinar su expresión algebraica de manera directa como con una sucesión de primer grado.
2. Las primeras diferencias entre sí son números distintos, sin embargo presentan una regularidad como las expresiones algebraicas de primer grado.
3. Las diferencias obtenidas de las anteriores forman una sucesión de una constante, es decir, de un mismo número.

LO QUE APRENDÍ

1. Examina la sucesión dada y calcula los datos que se piden 3, 4, 7, 12, 19…
   - ¿Cuáles son respectivamente los términos 6 y 7 de esta sucesión? 28 y 39
   - Escribe en tu cuaderno las operaciones que llevaste a cabo.
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta sucesión? $y = n^2 - 2n + 4$
   - ¿Cuál es el valor del vigésimo término de esta sucesión? $y = 364$
   - ¿En qué lugar de esta sucesión se encuentra el número 960? En la posición 32 aproximadamente.
   - Comprueba la expresión algebraica de esta sucesión. Escribe la sustitución y las operaciones para los primeros tres números.

     Para $x = 1$ $y = (1)^2 - 2(1) + 4 = 1 - 2 + 4 = 3$

     Para $x = 2$ $y = (2)^2 - 2(2) + 4 = 4 - 4 + 4 = 4$

     Para $x = 3$ $y = (3)^2 - 2(3) + 4 = 9 - 6 + 4 = 7$
2. Ahora diseña una expresión algebraica similar a la que encontraste y obtén los primeros términos que te permitan llevar a cabo el proceso para determinar los coeficientes y comprobar que tus algoritmos son correctos.
3. Comparte tus resultados con algunos compañeros, analicen sus expresiones algebraicas. Con la ayuda de su profesor seleccionen, clasifiquen los tipos de ecuaciones utilizadas y organicen una lluvia de ideas para conocer si consideran que existe otra manera de resolver este tipo de situaciones.

Cómo enriquecer la actividad

Permita que el alumno la resuelva por sus propios medios. Observe, y al finalizar resuélvala en el pizarrón analizando junto con ellos el procedimiento y el resultado. Permita que realicen correcciones y que determinen cuáles son las cosas que debe reafirmar para aprobar adecuadamente.

Recursos y materiales

Mediante el uso de algeblocks de una unidad cuadrada, podrá inducir a los alumnos a obtener la expresión general cuadrática para obtener el enésimo término presente en una sucesión.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Verifique que los alumnos analicen adecuadamente la situación planteada y que pueden relacionar la secuencia con la expresión algebraica correcta.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que demuestren que sus respuestas son adecuadas y que la expresión algebraica es correcta. Recuerde que la comprobación de resultados es muy importante para el desarrollo de los procesos matemáticos y un buen hábito que los alumnos deben desarrollar.

Curiosidades, acertijos y más

Pida a sus alumnos que encuentren la expresión general cuadrática de la siguiente sucesión de números: 53, 69, 87 y 107. Posteriormente solicite que justifiquen su procedimiento.

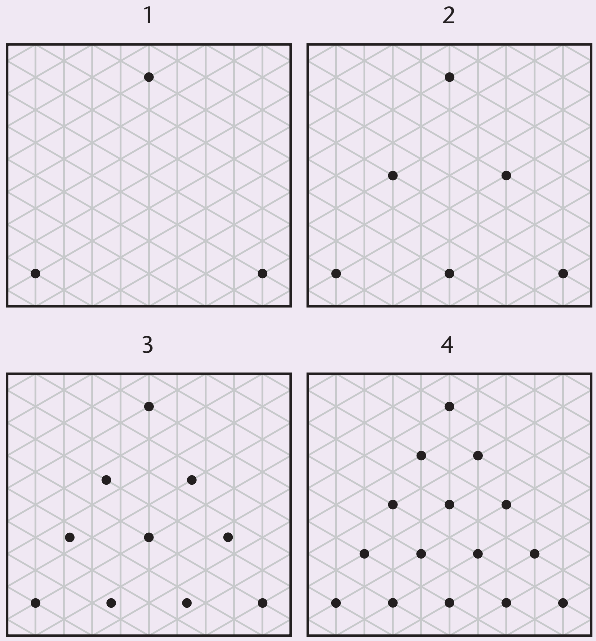
Matemáticas 3. Por competencias

USA LAS TIC

Visita la página http://www.aplicacionenlinea.com/2011/11/resolver-sucesiones-online.html (Consultada el día 21 de marzo de 2013, a las 15:23 horas), en ella encontrarás un programa interactivo en el que al cargar una sucesión, te muestra la expresión algebraica que la representa, además, construirá la sucesión y podrás observar gráficamente la línea que le corresponde. Este proceso te servirá para plantear nuevas situaciones y comprobar las que ya estudiaste, ofreciéndote una idea más clara de este tema. Después de tu visita, elabora en tu cuaderno un comentario acerca de las ventajas de utilizar este tipo de recursos, en qué te ayudó. De ser posible compártelo y coméntalo frente al grupo bajo la coordinación del profesor.

Desarrolla tus habilidades

1. En un libro de juegos mentales, Arturo cortó algunas fichas que forman una secuencia.



a) Reúnanse en equipos, analicen las fichas y respondan las preguntas:
   - ¿Cuál es la serie que se forma? 3, 6, 10, 15
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que la representa? $y = \frac{n^2}{2} + \frac{3x}{2} + 1$
   - De qué manera determinaron esta expresión? Utilizando el método de diferencias.
   - Si en total, la serie está formada por 10 fichas, ¿cuántos puntos contiene? 285

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y con la ayuda de su profesor, demuestren que su expresión es correcta y determinen si hay alguna otra manera de resolver esta situación.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos
Contenido 2	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

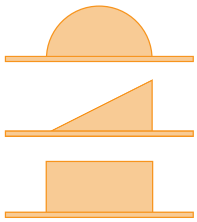
Qué observar

Verifique que los alumnos comprenden la relación que hay entre las figuras planas y los sólidos de revolución que se forman a partir de ellas.

ACUÉRDATE DE...

1. Realicen la siguiente actividad y contesten las preguntas.

   Tengan a la mano tres palos de madera (como los que se usan en las banderas pequeñas), hojas de colores, tijeras, un lápiz, su juego de geometría y cinta adhesiva.

   a) Corten una semicircunferencia, un triángulo rectángulo y un rectángulo.

   b) Peguen el rectángulo a uno de los palos, peguen el triángulo por alguno de sus lados menores y también la semicircunferencia por su diámetro.

   c) Ahora giren las figuras y analicen las figuras que forman y las características que presentan.

   - ¿Qué tipo de sólido se visualiza cuando se gira una circunferencia sobre su propio eje? Una esfera
   - ¿Qué cuerpo se visualiza al girar el triángulo? Un cono

     ¿Y al girar el rectángulo? Un cilindro
   - ¿En qué se transforman los lados de estas figuras planas? Generatriz

     Justifiquen su respuesta. Porque dejan de ser figuras planas para ser figuras con volumen.
   - ¿Cuál de estas tres figuras consideran que al ser giradas crea la figura con mayor volumen? La esfera

     ¿Por qué? La esfera genera un diámetro y esto permite que tenga mayor volumen.

2. Comparen sus respuestas con las de otras parejas y en conjunto con el profesor, elaboren su propia descripción que responda la pregunta, ¿qué es un sólido de revolución? Elaboren una explicación breve de la relación que hay entre los lados de una figura plana y la superficie del sólido que forman al girar sobre un eje.

Cómo enriquecer la actividad

Solicite a sus alumnos que investiguen por medio de videos o experimentos similares a este, cómo se forman los sólidos de revolución, la idea es que tengan clara la relación que hay entre los lados de cada figura con respecto al sólido que forman y que observen que el volumen obtenido depende directamente de estas medidas.

Para leer más

Seguramente, al escuchar la palabra *Revolución* tu mente evoca el movimiento armado del 20 de noviembre de 1910, con lo cual, recurres a su definición como cambio violento en las instituciones políticas, sociales y económicas de una nación; pero además, el término tiene significado científico, industrial y, por supuesto, tecnológico. En mecánica, esta palabra se utiliza para indicar el número de vueltas que da una pieza sobre su eje, es una unidad de frecuencia. En matemáticas, una revolución se define como una rotación de 360°, es decir, una vuelta completa que da un objeto sobre un eje hasta llegar a su posición de inicio.

Glosario

Generatriz. Son las líneas formadas por los lados de un polígono (rectángulo y triángulo rectángulo) que al girar sobre un eje generan el cono o el cilindro.

PRACTÍCALO

Actividad 2.1

1. Tomando como base las figuras planas de la actividad anterior, dibujen en su cuaderno los sólidos que se forman si se realiza la rotación de la **generatriz** bajo las siguientes condiciones:

Cómo enriquecer la actividad

Pida a sus alumnos un tubo de cartón (del papel sanitario), para que dibujen en cartoncillo los círculos que sirvan como tapa de la base inferior y superior. Posteriormente que realicen un corte en el tubo, de tal forma que obtengan un rectángulo; pídales que lo peguen en el cartoncillo, así como las dos tapas, que midan la altura, el radio y el perímetro del cilindro.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Al final de esta actividad, los alumnos deben comprender en qué forma se generan los sólidos, dependiendo del lado que se tome como eje de rotación, y deben ser capaces de comprender y explicar las características particulares para cada figura.

Curiosidades, acertijos y más

Arquímedes examinó varios sólidos de revolución, los cuales se forman al resolver las secciones cónicas sobre un eje de rotación. Trabajo en el que estuvo inspirado para lograr calcular los volúmenes de sólidos.

Matemáticas 3. Por competencias

a) Si se gira un triángulo rectángulo tomando como eje el cateto de mayor tamaño y otro si se toma como eje el cateto menor.

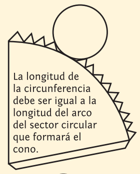
b) Si se gira un rectángulo tomando como eje su base y otro tomando como eje su altura.

c) Si se gira una circunferencia sobre un diámetro horizontal y otro tomando como eje un diámetro vertical.

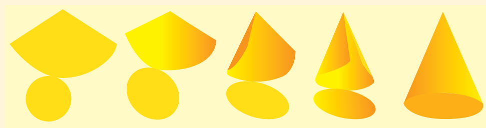
- ¿Cuál es la diferencia entre las figuras formadas? Se forman figuras diferentes.
- ¿Qué ocurrió en el caso del círculo? Forma la misma figura.
- Al comparar los sólidos formados por el triángulo y el rectángulo, ¿consideran que tienen el mismo volumen? No porque a mayor radio mayor volumen, y en este caso no son iguales.
- ¿Qué hubiera ocurrido con la figura de revolución formada si en lugar de pegar el rectángulo por el lado mayor se hubiera pegado por el menor? Generaría un mayor volumen.
- ¿Existirá alguna otra manera de generar un cilindro? Con un cuadrado
- ¿Es posible generar una esfera al revolucionar alguna otra figura? Solo con un círculo.

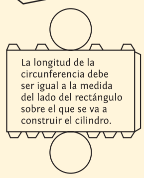
2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros y con la asesoría del profesor determinen, ¿cuáles son las características de los sólidos que se forman cuando se giran figuras planas con lados rectos, si se toman como ejes cada uno de sus lados? ¿De qué manera se relacionan las medidas de los lados de las figuras planas con las dimensiones de las figuras de revolución que forman?

Para tener en cuenta

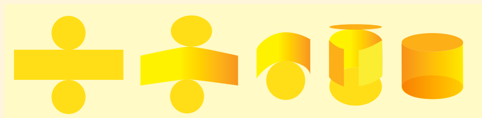


Construcción de un cono a partir de un desarrollo plano





Construcción de un cilindro a partir de un desarrollo plano



PRACTÍCALO

Actividad 2.2

1. Diseñen una estrategia, determinen las dimensiones y construyan un cono y un cilindro con una hoja de papel. Consideren las indicaciones de la sección anterior, “Para tener en cuenta”.

a) ¿Cuál fue la estrategia que diseñaron para la construcción de estas figuras? A base de figuras planas.

- ¿Qué estrategia utilizaron para hacer coincidir las longitudes de la circunferencia y la del sector circular al formar el cono? Calculando el diámetro del círculo para que coincida con el sector circular.
- ¿De qué manera lograron que coincidiera la longitud de la circunferencia con el lado del rectángulo en la construcción del cilindro? De la misma manera que lo hicimos para el cono.

b) ¿Cómo determinaron la altura de cada figura? Utilizando la otra arista de la figura plana.

c) ¿Cuáles son las características que se deben considerar para poder realizar la construcción de un cono y de un cilindro? Primero diseñar los círculos.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

PRACTÍCALO

Actividad 2.3

Consigan 3 bloques de plastilina de diferentes colores y un hilo de material resistente, o bien, un objeto que les permita realizar cortes sobre la plastilina. Tomen cada uno de los bloques de plastilina, córtenlos en 3 partes de diferentes tamaños y con ellos formen 3 cilindros, 3 conos y 3 esferas, todos con diferentes dimensiones.

1. Cilindros.
   a) Corten el primer cilindro a la mitad por el largo.
      - ¿Qué figura se obtiene al realizar el corte? Una circunferencia
      - ¿Qué relación tiene esta figura con la superficie que forma el área de la base del cilindro? Son iguales ¿Por qué? El corte se hizo en forma paralela a la base del cilindro.

   b) Corten el segundo cilindro a la mitad, partiendo de alguna de sus caras circulares.
      - ¿Qué figura se obtiene al realizar el corte? Un rectángulo
      - ¿Qué relación tienen las dimensiones de esta figura con las dimensiones del cilindro? Son iguales

   c) Corten el tercer cilindro de manera oblicua, a lo largo, sin tocar su base.
      - ¿Qué figura se formó al realizar el corte? Una elipse
      - ¿Tiene esta figura alguna relación con el cilindro o el rectángulo que lo genera? Sí Justifiquen su respuesta. Las dimensiones de la figura dependen del cilindro cortado.

2. Conos.
   a) Realicen un corte en el primer cono de manera paralela a la superficie de la base, aproximadamente a la mitad de su altura.
      - ¿Qué figura se forma al realizar el corte? Una circunferencia
      - ¿Se formará la misma figura si el corte se realiza a una altura mayor o menor a la que utilizaron? Sí ¿Por qué ocurre? La base del cono tiene la misma figura.
      - ¿Qué diferencia hay entre las figuras formadas en cortes a diferente altura? Sus dimensiones

   b) Corten el segundo cono exactamente a la mitad sobre su altura.
      - ¿Qué figura se forma al realizar el corte? Un triángulo
      - ¿Qué relación tienen las dimensiones de esta figura con el cono? Sus dimensiones son iguales.

   c) Corten el tercer cono de manera oblicua, sin llegar a la base circular, y luego repitan este corte, pero ahora dividiendo también el área de la base.
      - Al realizar el primer corte, ¿qué figura se forma? Una elipse
      - Al realizar el segundo corte, ¿qué figura se forma? Una hipérbola
      - ¿Qué diferencia hay entre estas dos figuras? Una es curva cerrada y la otra es una curva abierta.
      - ¿Tienen alguna relación estas figuras con el cono o el triángulo que lo genera? Sí ¿Por qué? Sus dimensiones dependen del cono cortado.

3. Esferas.
   a) Realicen un corte de la primera esfera exactamente a la mitad.
      - ¿Qué figura se forma al realizar el corte? Una circunferencia
      - ¿Qué relación tienen las dimensiones de esta figura con las dimensiones de la esfera? Son iguales

   b) Realicen un corte en la segunda esfera que no la divida por la mitad.
      - ¿Se formó una figura distinta a la obtenida en el corte anterior? No
      - ¿Por qué ocurre esto? Porque la esfera es una figura equidistante.

Qué observar

Dé el tiempo necesario para que realicen esta actividad de manera adecuada. Prepare a los alumnos con anticipación y verifique que durante la sesión la concentración y el orden sean los adecuados, esto con la intención de aprovechar el tiempo.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que los alumnos realicen en su cuaderno las anotaciones y dibujos que ellos consideren pertinentes, con la intención de registrar sus resultados, de ser así, pida que se realicen en limpio y de manera ordenada, incluso puede solicitar que la complementen con un comentario o una conclusión.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Observe que los alumnos comenten experiencias de los grupos a los que han pertenecido en su desarrollo, a efecto de que vayan identificando ambientes que los favorezcan en el ámbito social.

Cómo enriquecer la actividad

Puede solicitar que separen los elementos que forman la lámpara y que los dibujen en su cuaderno. Ésta es una buena oportunidad para relacionar un cono truncado con el trapecio rectángulo que lo genera, además se le facilitará determinar cómo es la figura plana que genera sólidos de esta forma.

Reflexión

Pida a sus alumnos que reflexionen acerca de este pensamiento de Rubén Darío (1867-1916).

"No dejes de apagar el entusiasmo, virtud tan valiosa como necesaria, trabaja, aspira, tiende siempre hacia la altura."

Matemáticas 3. Por competencias

c) Realicen en la tercera esfera un corte que tenga una forma distinta a las anteriores
- ¿Fue posible realizar un corte distinto? No
- ¿Por qué ocurrió esto? No importa la distancia en la que cortemos la esfera siempre.

4. Contrasten sus respuestas con las de otros equipos cercanos y examinen las justificaciones que elaboraron, determinando: ¿qué sólidos se pueden formar si estas líneas se hacen girar sobre un eje. Anoten sus conclusiones en su cuaderno.

PRACTÍCALO — Actividad 2.4

En la vida cotidiana se pueden encontrar muchos objetos que tienen como base algún cuerpo de revolución, como la lámpara de mesa que Luis acaba de comprar y piensa poner a un lado su cama.

1. Analicen la imagen y respondan las preguntas.
   - ¿Cuál es la figura plana que se debe girar para poder obtener la pantalla de la lámpara? Un trapecio
   - Dibujen en su cuaderno, la imagen junto con el eje de revolución.
   - ¿Es posible obtener esta figura a partir de un cono? Sí

     Expliquen su respuesta. Primero se forma el cono y después se le hace un corte paralelo con respecto a la base.
   - ¿Qué figura se debe hacer girar para obtener el soporte de la lámpara? Un rectángulo tomando como base el lado más cortó.
   - ¿Qué figura se debe hacer girar para obtener la base? Un rectángulo tomando como base el lado más largo.
   - Dibujen en su cuaderno, las figuras que dan origen al soporte y a la base
   - ¿Cuál es la diferencia entre las figuras planas que forman el soporte y la base? La longitud del radio y la altura de las mismas.

Glosario

Cono Truncado. Es un sólido que se forma al girar un trapecio rectángulo sobre el lado que tiene en sus extremos los ángulos rectos. Semeja el "corte" realizado en un cono de forma paralela a su base.

2. Comparen sus respuestas e identifiquen y analicen las características de un **cono truncado**. ¿Cuáles son las diferencias en las dimensiones del rectángulo y la ubicación en el eje de rotación para formar cilindros similares a la base y el soporte de la lámpara? La orientación que se le dé al rectángulo.

PRACTÍCALO — Actividad 2.5

Uno de los deportes más conocidos en el mundo es el futbol, del cual existen dos tipos: el soccer y el americano.

1. Analiza los balones que utiliza cada uno de estos deportes, y responde las preguntas.
   - ¿Consideras que el balón de soccer es una esfera? Sí

     Justifica tu respuesta. Por la forma que presenta, ya que las partes que lo componen son equitativas.
   - ¿Qué figura es necesario hacer girar para visualizar un balón de soccer? Una circunferencia o también con media circunferencia.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

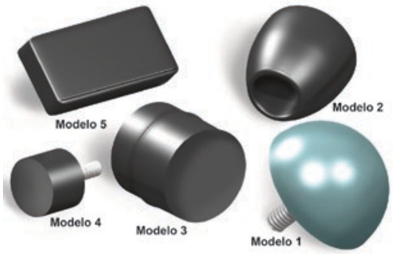
- ¿Qué figuras forman la superficie del balón de soccer? Pentágonos
- ¿Qué figura habrá que hacer girar para visualizar un balón de americano? Una elipse
- ¿Consideras que únicamente con una figura plana se puede obtener la forma del balón de americano o su forma se debe a una combinación de varias figuras planas? Argumenta tu respuesta. Sería la manera más sencilla, y al parecer necesitaríamos más de 3 figuras planas para poder obtener el mismo resultado.
- Dibuja en tu cuaderno, la o las figuras que se deben hacer girar para obtener la forma de un balón de americano.

2. En forma grupal determinen, ¿cómo influye que una esfera esté compuesta por pentágonos y hexágonos al tratar de formar una esfera? y ¿cómo son la o las figuras planas que generan un ovoide como el balón de americano?

PRACTÍCALO

Actividad 2.6

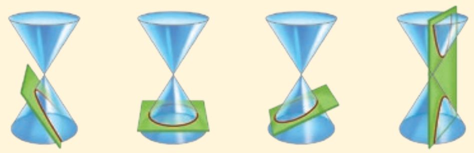
Otro ejemplo del uso de las figuras de revolución en la vida cotidiana, es en una empresa donde fabrican topes para muebles.



1. Analicen los modelos de topes para muebles que se muestran en la imagen y respondan las preguntas.
   - ¿Cuál es el modelo de tope que se puede obtener teniendo como base una sola figura de revolución? El modelo 3
   - ¿Qué figura se utilizó como base para crear el modelo 3? Un rectángulo
   - ¿Cuántas figuras se necesitan para que, al girarlas sobre el eje de rotación, se forme el modelo 1? Dos (un rectángulo y la mitad de una circunferencia).
   - Dibujen en su cuaderno la forma base y el eje.
   - ¿Cuántas figuras se necesitan para que al girarlas sobre el eje de rotación se forme el modelo 2? Dos Dibujen la forma base y el eje.
2. Comenten al grupo, ¿qué ocurre al combinar dos o más figuras base cuando se genera un sólido de revolución? Anoten en su cuaderno sus conclusiones.

Para leer más

Cuando un cono se corta en varias secciones éstas siempre forman alguna curva cerrada o abierta, estas curvas reciben el nombre de cónicas y pueden formar una parábola, circunferencia, elipse o hipérbola.



Qué observar

Ya que es muy complicado dividir físicamente alguno de estos balones, para analizar el corte, es importante que observe que los alumnos comprenden la idea de la actividad y son capaces de justificar sus respuestas.

Cómo enriquecer la actividad

Hay figuras de revolución que son compuestas por más de una figura plana; por ello es conveniente que pida a los alumnos que tracen las figuras en su cuaderno y que describan cuáles son las características que tiene cada uno.

Recursos y materiales

En la siguiente página encontrará información que le permitirá trabajar este tema con sus alumnos.

http://data.imatematicas.es/suprevol/revolucion.htm

Bitácora pedagógica

Qué observar

La idea de la actividad es relacionar lo más posible las figuras de revolución con los sólidos que forman y que son comunes en la vida cotidiana. Verifique que los alumnos son capaces de entender esta idea y que son capaces de obtener conclusiones utilizando su observación y su capacidad de deducción.

Cómo enriquecer la actividad

Puede utilizar objetos cercanos a su salón de clases y analizar las características de cada uno, así como las similitudes que encuentren con los que se muestran en esta sección.

Cómo enriquecer la actividad

Mediante un cono para beber agua, pida a los alumnos que lo desarmen para observar e identificar la altura del cono y el radio de su base. Una vez desarmado, que lo peguen en cartoncillo y anoten el radio, la altura, la generatriz, el perímetro de la base, el ángulo del sector circular que permite la formación del cono. Al final, pídales que formen un cono con las dimensiones que usted les asigne y justifiquen cada procedimiento.

Para tener en cuenta

Los poliedros y los cuerpos de revolución son cuerpos con volumen, sin embargo, son distintos entre sí, la principal diferencia es que un poliedro está constituido por caras planas y un sólido de revolución tiene una o varias caras curvas.

LO QUE APRENDÍ

El empleo de objetos que tienen alguna relación con los cuerpos de revolución nos permite su observación en varios contextos de la vida cotidiana.

1. Analiza las siguientes figuras, realiza tu propia clasificación y sobre, las líneas, anota el nombre del objeto y marca la opción "sí" o "no", dependiendo de si es un cuerpo de revolución perfecto, es decir, sin salientes ni asas.

Olla

○ Sí ○ No

Barril

○ Sí ○ No

Helado

○ Sí ○ No

Bote De Basura

○ Sí ○ No

Mamila

○ Sí ○ No

Vasija

○ Sí ○ No

Píldora

○ Sí ○ No

Comal

○ Sí ○ No

a) ¿Alguno de los objetos mostrados son cuerpos de revolución perfectos? Tres
   - De ser así, anota cuáles son. El barril, el cono del helado junto con la bola de nieve y la píldora.
   - ¿Qué objetos tienen como base al cono? Un triángulo rectángulo
   - ¿Qué objetos tienen como base un cilindro? Un rectángulo
   - ¿Qué objetos tienen como base una esfera? Una circunferencia
   - ¿Cuáles objetos presentan una combinación de figuras? El helado

b) Traza en tu cuaderno el eje de rotación y la figura base que permite formar estos mismos objetos.
   - ¿Qué estrategia utilizaste para determinar las figuras base? Las aprendidas en este capítulo.
   - ¿Cómo determinaste la posición y la longitud del eje de rotación? Verificando la longitud del radio y de la altura de la figura que forma.
   - ¿Cómo encontraste la figura base para los sólidos que requieren dos o más formas básicas? Observándolas y aplicando lo aprendido anteriormente.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

- ¿Es posible obtener estas figuras utilizando un procedimiento distinto? No

  Justifica tu respuesta. Hasta el momento no conozco otra forma de realizarlo.

- Si tuvieras físicamente uno de estos sólidos, ¿cómo podrías trazar de manera real la figura base que le dio origen? Tomando las medidas necesarias tales como el radio, la altura del mismo y en caso de ser necesario el diámetro de la circunferencia que presentan.

2. Compara tus resultados y tus trazos con los de tus compañeros y con la ayuda del profesor, determina cuál es la utilidad de las los sólidos de revolución en la vida cotidiana.

Desarrolla tus habilidades

En una fábrica de artículos de plástico están estudiando algunos objetos con la intención de elaborar nuevos diseños.

1. Reúnanse en enquipos y analicen los nombres que contiene el recuadro mostrado. Establezcan su relación con los sólidos de revolución, determinando qué sólido o combinación de ellos dio su origen.

Vaso · Bandeja · Plato · Fuente · Cubo · Cazuela · Botella · Jarra · Lata · Cuchara · Sifón · Tonel

- ¿Cuáles objetos tienen como base una figura pura como un triángulo, rectángulo o círculo? Vaso, lata, cazuela y bandeja
- ¿Cuáles objetos consideras están formados por una combinación de formas básicas? Tal vez la fuente, dependiendo de su forma.
- ¿Qué objetos no pertenecen a una figura de revolución? Sifón, jarra, cuchara, cubo y plato

2. Contrasten sus respuestas con la de otros equipos y con la ayuda del profesor concluyan cuáles son las características de estos objetos que permiten determinar si son o no figuras de revolución.

USA LAS TIC

Visita la página http://blasinfantelebrija.com/intugeom/unidades/solidrev/solirv_1.htm (Consultada el día 23 de febrero de 2013, a las 14:34 horas), en ella encontrarás la posibilidad de mover de manera virtual puntos y líneas que forman sólidos de revolución, durante tu visita contrasta lo que aprendiste en este contenido con la forma en que ahí se expone, utiliza las herramientas que aparecen para reafirmar tus conceptos e ideas acerca de este tema.

Qué observar

Permita que los equipos opinen y justifiquen su punto de vista, con la intención de que lleguen a acuerdos y obtengan conclusiones. Vigile que la actividad se realice con el orden necesario y permita que tengan el tiempo suficiente para resolverla.

Cómo enriquecer la actividad

La motivación en una actividad que busca desarrollar habilidades es muy importante. Anime a los equipos a realizar el trabajo de clase y busque la manera de resaltar la utilidad de conocer las formas generadas por revolución, puede comentar que en cursos posteriores es posible que tengan que calcular el volumen de estos objetos y es importante aprender a identificar la figura plana que los genera.

Reflexión

Reflexione junto con sus alumnos la siguiente frase célebre.

"No hay distancia que no se pueda recorrer, ni meta que no se pueda alcanzar."

Napoleón Bonaparte.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Ponga especial atención en que los alumnos identifiquen que no están calculando el lado mayor del triángulo rectángulo y que esto implica modificar la fórmula del teorema, lo que da el origen de la resta entre la hipotenusa y el cateto que representa la altura del poste. Vigile que utilicen la fórmula del área del círculo para obtener el área alumbrada.

Cómo enriquecer la actividad

Sugiera que ahora la incógnita sea la hipotenusa del poste, conociendo el valor de x altura del poste, esto le permitirá a los alumnos comprobar su resultado. Reafirmar el procedimiento que realizaron y ver que ahora no se hace una resta sino una suma bajo el signo del radical.

Recursos y materiales

La siguiente página le permitirá encontrar información y situaciones para que los trabaje con sus alumnos.

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b04_t03_s02_aulademedios/index.html

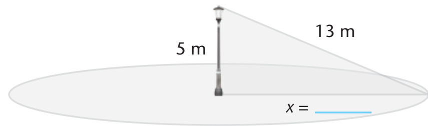
Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 3	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

ACUÉRDATE DE...

1. Analicen y resuelvan la siguiente situación.

   a) El papá de Juan Carlos es ingeniero y trabaja en alumbrado público, actualmente está colocando postes de luz en un parque y desea conocer la superficie que puede alumbrar con los nuevos postes que está instalando. Conoce la distancia de la proyección de la sombra a partir del foco y la altura del poste, ¿cómo puede conocer la superficie total que puede alumbrar? Analicen el esquema y respondan las preguntas.



   - ¿Qué procedimiento puede utilizar el ingeniero para conocer la superficie total que podría iluminar con cada poste? Utilizar el teorema de Pitágoras.
   - ¿Cuál es el valor del cateto *x*? 12 m
   - ¿Qué valor tiene la hipotenusa del triángulo rectángulo? 13 m
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? $x = 2\sqrt{\&\ 13^2 - 5^2}$
   - ¿Cuál es la condición que permite afirmar que la altura del poste es uno de los catetos del triángulo rectángulo? La hipotenusa es el lado mayor del triángulo.
   - ¿Qué operación permite encontrar el área total que alumbra cada poste? $A = \varpi(12)^2$
   - ¿Cuál es el área total iluminada? $A = 452.38\ m^2$

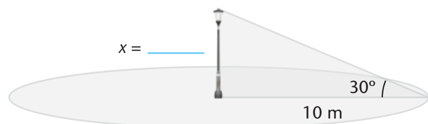
2. Contrasten sus estrategias y procedimientos con los de otros equipos y con la asesoría del profesor determinen cuál estrategia es la más adecuada para solucionar este problema. Comenten si es que hay algún otro procedimiento que pudieran emplear, de ser así demuestren la conveniencia del que consideren mejor.

PRACTÍCALO

Actividad 3.1

1. Lean y contesten las preguntas con base en la situación dada.

   a) El papá de Juan Carlos ahora está instalando postes en la plaza central del parque y necesita que los postes iluminen una superficie más pequeña con un radio de 10 m y sabe también que la luz, para que llegue de manera óptima, debe tener un ángulo de 30°, entonces, ¿cuál es la altura que deben tener los postes?



182

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

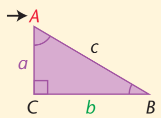
- Diseñen una estrategia para solucionar este problema y escríbanla. Como en este caso solo nos dan como dato un ángulo y el cateto adyacente, entonces utilizaremos la función trigonométrica tangente.
- ¿Es posible utilizar el teorema de Pitágoras? De manera diracta no.
  Justifiquen su respuesta. El teorema de Pitágoras es la base de la trigonometría y con base en ello resolveremos este problema utilizando una función.
- ¿Consideran que los datos dados son los necesarios o hacen falta? Con esos datos es suficiente
  Justifiquen su respuesta. Apoyándonos en la función trigonométrica tangente podemos realizar el cálculo pedido.
- ¿Cuál consideran que es al valor de *x*? 5.77 m
- ¿Cómo pueden comprobar que el resultado es correcto? Con el dato obtenido ahora sacamos el ángulo que nos habían proporcionado para resolver el problema y con la función inversa de la tangente lo obtenemos.

2. Examinen y contrasten sus procedimientos con los propuestos por alguna otra pareja y con la ayuda del profesor analicen algunos de ellas, los resultados obtenidos y comprueben sus hipótesis, planeamientos y soluciones.

Para tener en cuenta

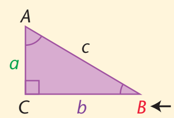
En un triángulo rectángulo los catetos se clasifican en opuestos y adyacentes, dependiendo del ángulo agudo que se tome como referencia. Si el cateto está formando el ángulo de referencia, entonces es adyacente; si el cateto no forma el ángulo de referencia, entonces es opuesto a él.

Figura 1



a Es el cateto adyacente del ángulo *A*
b Es el cateto opuesto del ángulo *A*

Figura 2



a Es el cateto opuesto del ángulo *B*
b Es el cateto adyacente del ángulo *B*

PRACTÍCALO

Actividad 3.2

1. Utilizando **trigonometría**, analicen la situación planteada y respondan las preguntas.
   a) Con la regla del juego de geometría, tomen las medidas de los lados de cada triángulo mostrado en la imagen y regístrenlas sobre la línea que les corresponda.
   b) Con su transportador midan los ángulos y registren su amplitud en el lugar correspondiente a cada uno.

Glosario

Trigonometría. Es la parte de las matemáticas, dependiente de la geometría, que estudia los triángulos y se ocupa del cálculo de sus 6 elementos y las relaciones que se dan entre ellos (tres ángulos y tres lados); por lo tanto, resolver un triángulo significa conocer estas 6 magnitudes.

Qué observar

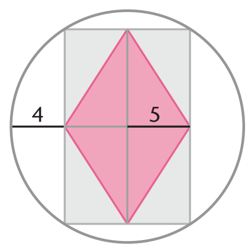
Verifique que el alumno comprenda que con estas condiciones necesita utilizar una función trigonométrica y no el teorema de Pitágoras. Es importante que los alumnos realicen el cálculo adecuadamente con su calculadora o bien con tablas trigonométricas, así que es posible que necesite asesorarlos en el correcto uso de estas herramientas.

Cómo enriquecer la actividad

Puede solicitar a los alumnos que analicen distintas condiciones, donde tangan que calcular las medidas de los ángulos o de los lados cambiando los datos que se toman como base, lógicamente los resultados van a coincidir; por lo tanto, pondrán más atención en el planteamiento y el procedimiento que en los resultados en sí.

Curiosidades, acertijos y más

¿Cuál es la medida del lado del rombo si se tiene que los segmentos marcados en negro miden 4 y 5 cm?



Bitácora pedagógica

Qué observar

En esta actividad, las medidas que obtengan los alumnos pueden variar ligeramente. Observe que son capaces de utilizar correctamente el equipo de geometría, y ponga especial atención en cómo realizan las medidas de los ángulos, si es que las figuras son demasiado pequeñas para la medida de su transportador. De ser necesario, oriéntelos con algunas estrategias de medición, como por ejemplo, prolongar los lados para mejorar la precisión en las mediciones.

Cómo enriquecer la actividad

Durante esta actividad recuerde a los alumnos los tipos de errores de entrada, procedimiento y salida que se pueden presentar, así como el criterio para determinar el redondeo que se hace sobre las cantidades obtenidas. Es importante enfatizar que al momento de anotar el decimal de una función trigonométrica se colocan las 4 primeras cifras significativas, después del punto decimal.

Matemáticas 3. Por competencias

Figura 1

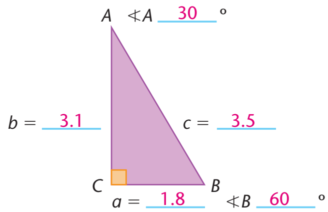


Figura 2

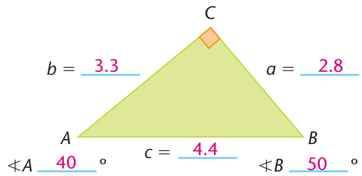
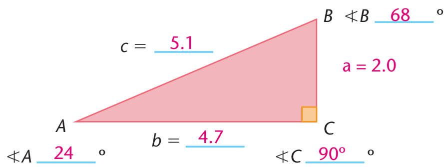


Figura 3



c) Completen la tabla con los datos que obtuvieron para cada triángulo.

Figura	Cateto adyacente (ca) al ∢*A*	Cateto opuesto (co) al ∢*A*	Hipotenusa (*Hip*)	Cateto adyacente (*ca*) al ∢*B*	Cateto opuesto (co) al ∢*B*	Hipotenusa (*Hip*)
1	3.1	1.8	3.5	1.8	3.1	3.5
2	3.3	2.8	4.4	2.8	3.3	4.4
3	4.7	2.0	5.1	2.0	4.7	5.1

d) Con los datos de la tabla anterior, completen esta nueva tabla.

Figura	Para el ángulo A			Para el ángulo B		
	$\frac{co}{Hip}$	$\frac{ca}{Hip}$	$\frac{co}{ca}$	$\frac{co}{Hip}$	$\frac{ca}{Hip}$	$\frac{co}{ca}$
1	$\frac{1.8}{3.5}$	$\frac{3.1}{3.5}$	$\frac{1.8}{3.1}$	$\frac{3.1}{3.5}$	$\frac{1.8}{3.5}$	$\frac{3.1}{1.8}$
2	$\frac{2.8}{4.4}$	$\frac{3.3}{4.4}$	$\frac{2.8}{3.3}$	$\frac{3.3}{4.4}$	$\frac{2.8}{4.4}$	$\frac{4.7}{2.0}$
3	$\frac{2.0}{5.1}$	$\frac{4.7}{5.1}$	$\frac{2.0}{4.7}$	$\frac{4.7}{5.1}$	$\frac{2.0}{5.1}$	$\frac{4.7}{2.0}$

- ¿Qué relación pueden encontrar entre las funciones trigonométricas que obtuvieron al comparar los resultados para ambos ángulos? El co/Hip del ángulo A es igual al ca/Hip del ángulo B, y viceversa.

- De los resultados que obtuvieron expresados en forma décimal, ¿qué funciones dan como resultado un número menor que uno? Todos con excepción de la última columna.

  ¿Por qué ocurre esto? Porque el numerador es más grande que el denominador, o bien el dividendo es más grande que el divisor.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

- ¿Cuál función da como resultado un número mayor que 1? Es la función cateto opuesto sobre cateto adyacente para el ángulo b.
  ¿Por qué ocurre esto? Porque el numerador es más grande que el denominador.
- Esta relación que encontraron entre los números décimales, ¿se observa igual para ambos ángulos? Sí Justifiquen su respuesta. Se aplica en diferentes funciones.

2. Comparen sus resultados, y con su profesor diseñen una estrategia que les permita recordar fácilmente el nombre de las funciones y su equivalencia en relación con los catetos, por ejemplo: la función seno es igual al cociente obtenido al dividir el cateto opuesto sobre la hipotenusa.

Para leer más

Al cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa se le conoce como función seno y se abrevia *sen*.

Al cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa se le conoce como función coseno, y se abrevia *cos*.

Al cociente entre el cateto adyacente y el cateto opuesto se le conoce como función tangente y se abrevia *tan*. Éstas son las principales funciones de la trigonometría aplicadas a un triángulo rectángulo.

PRACTÍCALO

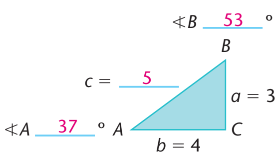
Actividad 3.3

1. Reflexiona sobre la situación planteada, analiza los triángulos dados y determina las funciones trigonométricas para los ángulos agudos.

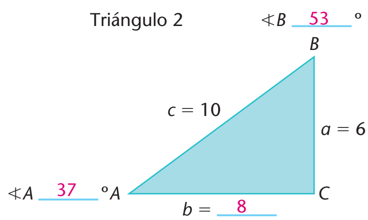
   El profesor de matemáticas de Juan Carlos les pidió a sus alumnos que encontraran una manera de plantear las funciones trigonométricas de dos triángulos rectángulos, para ello trazó en el pizarrón las siguientes figuras.

   a) Completa los datos que faltan y responde las preguntas que se plantean a continuación.

Triángulo 1



Triángulo 2



- ¿Cómo determinaste la medida de la hipotenusa del triángulo 1? Con el teorema de Pitágoras.
- ¿Cómo determinaste la medida del cateto b en el triángulo 2? Con el teorema de Pitágoras.
- ¿Cómo encontraste la medida de los ángulos agudos de ambos triángulos? Con la función seno inversa.

   b) Con los datos anteriores como referencia, completa la tabla para las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de ambos triángulos. Considera que se debe anotar siempre primero la función trigonométrica y el ángulo para obtener su equivalencia.

Qué observar

El propósito de esta actividad es analizar las similitudes entre las funciones trigonométricas de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Verifique que los alumnos comprendan esto durante el proceso de análisis, sobre todo al plantear la función como una expresión racional común.

Cómo enriquecer la actividad

Analice con los alumnos los datos obtenidos y establezca una relación entre las medidas de las funciones de los dos ángulos agudos. Observe qué funciones son inversas y de qué manera se puede utilizar esto para plantear rápidamente las 12 funciones, conociendo las 3 primeras de uno de los ángulos agudos.

Transversalidad

Ciencias 2, Física

En el tema Movimiento rectilíneo uniforme se trabajan con gráficas de distancia-tiempo. Pida a los alumnos que repasen este tema y deduzcan de qué forma puede aplicar las identidades trigonométricas para encontrar la distancia, el tiempo y la pendiente de la recta que se forma.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Vigile que las operaciones y los trazos que realice sean adecuados, tome en cuenta que el propósito de esta actividad es establecer una relación entre la pendiente de una recta, la función tangente y el ángulo que representa.

Cómo enriquecer la actividad

Haga notar que la recta por cada unidad en *x* "cruza" la misma cantidad de cuadros que indica el coeficiente, puede trazar pequeños rectángulos para cada unidad, esto ayudará a que tengan una mejor orientación al momento de observar una gráfica y compararán con mayor facilidad los datos en relación con los dos ejes.

Recursos y materiales

La página de *Encicloabierta* muestra un interactivo donde se podrá reforzar este tema. Invite a sus alumnos que la visiten y resuelvan las situaciones que se presentan.

http://recursos.encicloabierta.org/telesecundaria/3tls/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b04_t03_s01_descartes/index.html

Triángulo	Seno		Coseno		Tangente	
1	*senA* = 0.6	*senB* = 0.8	*cosA* = 0.8	*cosB* = 0.6	*tanA* = 0.75	*tanB* = 1.3
2	*senA* = 0.6	*senB* = 0.8	*cosA* = 0.8	*cosB* = 0.6	*tanA* = 0.75	*tanB* = 1.3

- ¿Qué relación puedes determinar entre las medidas de los lados de ambos triángulos?
  Podemos observar que están en la misma posición, por eso sus ángulos son iguales.
- ¿Esta relación se ve reflejada en los cocientes de las funciones trigonométricas que obtuviste en la tabla? Sí ¿A qué se debe esto? Porque los ángulos de los dos triángulos fueron diseñados básicamente con los mismos ángulos.
- ¿Puedes establecer alguna relación de equivalencia entre las funciones trigonométricas para los ángulos de cada triángulo? Sí De ser así, ¿cuál es la relación? Aunque sus aristas son de diferentes magnitudes, los ángulos resultaron ser iguales.

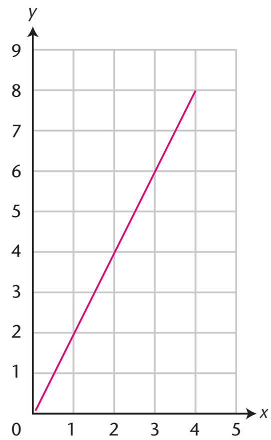
2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y con la ayuda del profesor determinen: ¿qué relaciones de equivalencia hay entre las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?, ¿qué relación hay entre las funciones trigonométricas si se comparan dos triángulos que son semejantes?

PRACTÍCALO **Actividad 3.4**

1. Dentro del recuadro se encuentran dos funciones, obtengan los valores indicados en la tabla para *y*, y con estas coordenadas tracen la gráfica que le corresponde.

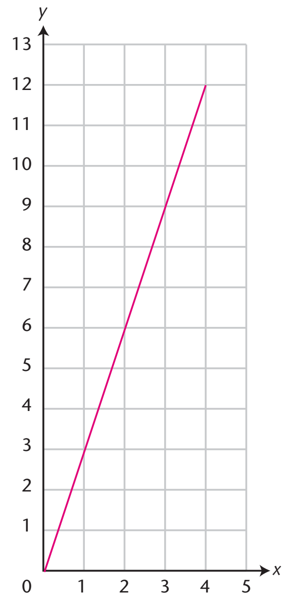
$y = 2x$

x	*y*
1	2
2	4
3	6
4	8



$y = 3x$

x	*y*
1	3
2	6
3	9
4	12



Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

a) Tomen como punto de referencia la última coordenada, y con ella tracen una línea paralela al eje y hasta llegar al eje x para formar un triángulo rectángulo.

- ¿Cuánto mide la base del triángulo? Cuatro
- ¿Cuánto mide la altura? Doce
- Tomando como referencia el ángulo cuyo vértice es el origen, ¿qué representan la base, el cateto opuesto, el adyacente y la hipotenusa del triángulo? El ángulo alfa también llamado ángulo A.
- ¿Qué representa la altura? El cateto opuesto
- ¿Cuál es la razón tangente entre estas dos cantidades para la función $y = 2x$? $\frac{8}{4}$
- ¿Cuál es el cociente de esta división? 2
- ¿Qué relación tiene esta cantidad con la función dada? Es la constante que contiene la función.
- ¿Ocurre esta misma relación para la función $y = 3x$? Sí

  Expliquen por qué se presenta esto. Esto quiere decir que las medidas de nuestro triángulo son correctas.
- En sus propias palabras, ¿cuál es la relación entre la función tangente con la función algebraica que representa la recta? Es el único punto en la recta donde la tangente toca a la función dada.

b) Planteen una función similar a éstas y comprueben que su conclusión es correcta.

2. Comparen sus resultados con los de otras parejas y con la ayuda del profesor elaboren en su cuaderno una definición formal para explicar la relación entre la tangente y la pendiente de una recta, comenten si consideran que es posible explicar esta relación de alguna manera distinta.

PRACTÍCALO

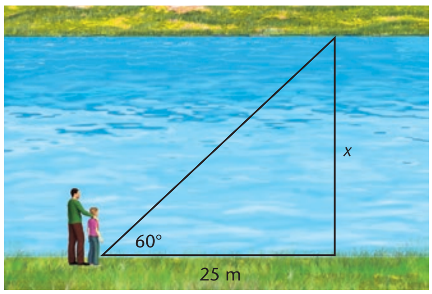
Actividad 3.5

En la vida cotidiana, conocer las funciones trigonométricas tiene muchas aplicaciones ya que ellas trabajan directamente en triángulos rectángulos cuando éstos no tienen todos los datos para aplicar directamente el teorema de Pitágoras.

1. Analicen la siguiente situación y respondan las preguntas.

a) El sábado pasado Diana acompañó a su papá al trabajo, él es ingeniero civil y está construyendo un puente sobre un río. Al ver este problema le preguntó a ella, ¿cómo puedo conocer el ancho del río si sólo puedo tomar las medidas desde uno de los lados?

- ¿Ustedes, qué hubieran contestado? Que utilice el teorema de Pitágoras.



b) Desde un lado del río, el ingeniero pudo tomar dos medidas, una distancia de 25 m y el ángulo hasta una línea imaginaria perpendicular que representa el ancho del río (x).

- Si la tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, es igual al cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente, ¿qué representa la x? Al cateto opuesto
- Entonces, ¿qué representa el lado que mide 25 m? El cateto adyacente Por lo tanto, ¿cómo se debe expresar la función trigonométrica? x = 25 (tan60)

Qué observar

Ponga especial atención en el análisis que hacen los alumnos de esta situación, la intención es que valoren la conveniencia de conocer estos procedimientos para resolver situaciones que contienen datos “inaccesibles”.

Cómo enriquecer la actividad

Puede complementar esta actividad realizando preguntas reflexivas en cuanto a cómo se determina el procedimiento para encontrar el valor de x y por qué la tangente es el más adecuado. También puede enriquecer esta actividad si motiva a los alumnos a comprobar su resultado explicando los algoritmos que realizaron.

Curiosidades, acertijos y más

Hace más de 3000 años, los babilonios y los egipcios fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las identidades trigonométricas para realizar medidas en la agricultura y para la construcción de pirámides.

Bitácora pedagógica

187

Qué observar

En esta actividad, la hipotenusa es una constante, por lo tanto, es importante que el alumno observe cómo se comportan las medidas de los catetos cuando se modifica la medida del ángulo agudo dado. Verifique que son capaces de determinar si ambos catetos aumentan o disminuyen, o si es que uno aumenta y el otro disminuye y que justifiquen por qué ocurre esto.

Cómo enriquecer la actividad

Los ángulos de 60 y 45 grados son ángulos notables, puede resaltar esto al momento de realizar la actividad y complementarla resolviendo esta misma situación con otras medidas angulares; esto reafirmará lo que ocurre con la medida de los catetos y brindará al alumno más seguridad en sus procedimientos.

Reflexión

"Trabajar en equipo divide el trabajo y multiplica los resultados."

Pida a sus alumnos que en equipo reflexionen sobre las actividades en equipo.

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Cómo podemos plantear esta expresión para encontrar el valor de x? $x = (\tan 60°)(25 \text{ m})$
- ¿Cuál es la tangente de 60°? Obtengan el resultado con ayuda de la calculadora. 1.73

  Entonces, ¿cuánto mide el ancho del río? 43.3 m
- Para resolver totalmente el triángulo rectángulo, ¿cuánto mide el otro ángulo agudo? 30°

  ¿Cómo calcularon este dato? La suma de los ángulos de un triángulo es de 180° y como uno de ellos es de 90° sustituimos y lo obtenemos.
- ¿Cuánto mide la hipotenusa? ______ ¿Qué estrategia utilizaron? Nos apoyamos en el teorema de Pitágoras.

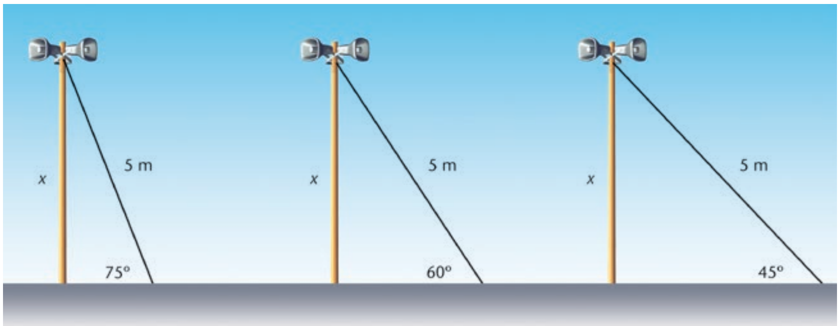
2. Consensúen de forma grupal, ¿cómo se realiza el planteamiento de una expesión trigonométrica cuando sólo se tienen como datos uno de los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y el otro cateto representa una incógnita? Describan cuál es el algoritmo (incluyendo el uso de la calculadora) que se debe llevar a cabo cuando la incógnita está en el numerador de la razón.

PRACTÍCALO

Actividad 3.6

1. En un estadio de futbol se están colocando bocinas en la parte alta de las gradas, los tensores que están utilizando para fijarlas tienen la misma longitud y es necesario investigar: ¿cuál es la altura que pueden tener los postes que soportarán las bocinas?

   a) Analicen el esquema y, con base en los datos dados encuentren el valor de la altura para los 3 postes.



- ¿Qué representa la altura de cada poste, tomando como base el ángulo agudo conocido de cada triángulo, el cateto opuesto, el adyacente o la hipotenusa? El cateto opuesto
- ¿Qué representa el cable tensor de 5 m? La hipotenusa
- Entonces, ¿qué función trigonométrica relaciona estas cantidades? La función seno
- ¿Cómo se expresa esta función para el ángulo de 75°? $\text{sen}75° = \frac{x}{5 \text{ m}}$
- ¿Cómo se expresa para el ángulo de 60°? $\text{sen}60° = \frac{x}{5 \text{ m}}$
- ¿Cómo se expresa para el de 45°? $\text{sen}45° = \frac{x}{5 \text{ m}}$
- ¿Cuál es el valor de la altura del primer poste? 4.82 m
- ¿Cuál es la altura del segundo poste? 4.33 m
- ¿Qué altura tiene el tercero? 3.53 m

Bitácora pedagógica

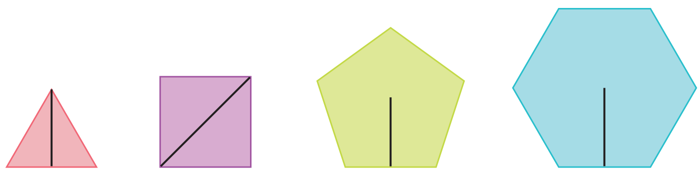
BLOQUE 4

- ¿Qué operaciones hay que realizar para encontrar el valor de cada x? Hay que calcular el seno del ángulo dado y multiplicarlo por la hipotenusa.
- ¿Qué relación se puede establecer entre el ángulo dado y la altura de los postes? A mayor ángulo mayor altura y viceversa.

2. Comparen sus resultados y describan cuál es el procedimiento para plantear una expresión algebraica para la función seno, y cuál es el algoritmo (incluyendo el uso de la calculadora) para encontrar el valor de la incógnita cuando ésta se encuentra en el numerador.

LO QUE APRENDÍ

1. En los polígonos regulares que se muestran en la imagen, calcula su área sabiendo que cada lado mide 3 cm.



a) Triángulo equilátero.
- ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos internos? 60°
- ¿Cómo se plantea la expresión trigonométrica que permite conocer la altura? $h = 1.5\ (tan60)$
- ¿Cuál es el área? 3.88 cm^2
- Explica de forma breve cuál fue el procedimiento que tuviste que realizar para conocer el área del triángulo. Primero se tuvo que calcular la altura del triángulo mediante el teorema de Pitágoras, la cual utilizamos para la fórmula del área de un triángulo que es $A = \frac{bh}{2}$

b) Cuadrado.
- ¿Cuánto mide el área? 9 cm^2
- ¿Qué estrategia utilizaste para encontrarla? Como las aristas de un cuadrado son iguales, lo que se hizo fue sustituir los valores en la siguiente fórmula: $A = l^2$
- ¿Cuál es la forma más sencilla para encontrar la longitud de la diagonal? Utilizando el teorema de Pitágoras.
- ¿Es necesario utilizar funciones trigonométricas? No

  Justifica tu respuesta. Porque la podemos obtener como se obtiene la hipotenusa de un triángulo rectángulo y no es necesario utilizar una función trigonométrica.
- De ser así, ¿cuál expresión trigonométrica te permite encontrar el valor de la diagonal?

  $x = \frac{3}{\cos 45°}$

c) Pentágono y hexágono.
- ¿Cuánto mide uno de los ángulos internos del pentágono? 108°
- ¿Y del hexágono? 120°
- ¿Qué estrategia utilizaste para investigar este dato? Un pentágono tiene 5 lados y se puede dividir en 3 triángulos que juntos suman 540° y cada vez que se añade un lado más se le suman 180°, puesto que representaría un triángulo más.

Qué observar

Verifique atentamente los planteamientos que realizan y pida constantemente que los justifiquen; también es muy importante que observe si son capaces de hacer las operaciones correctamente y comprobar sus resultados.

Cómo enriquecer la actividad

Enfatice los procedimientos auxiliares que se pueden utilizar, como por ejemplo, el teorema de Pitágoras, la fórmula para los cálculos de áreas y la suma de los ángulos internos de un polígono regular para determinar la medida de uno de sus ángulos internos. Esto complementará la actividad logrando que el alumno amplíe su horizonte en cuanto al método de planteamiento en la solución de una situación como ésta.

Bitácora pedagógica

Transversalidad

Historia 1

Pida a sus alumnos que realicen la biografía de Pitágoras y hagan mención de sus aportes a las Matemáticas, así como las condiciones socioculturales de los griegos en esa época.

Matemáticas 3. Por competencias

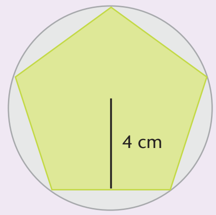
- ¿Cómo se puede plantear una función trigonométrica para encontrar el valor de la apotema? $x = 1.5$ cm $(\tan^{-1})\ (54°)$
- ¿Cuánto mide la apotema del pentágono? 2.32 cm
- ¿Cuánto mide la apotema del hexágono? 2.3 cm
- ¿Cuál es el área del pentágono? 17.4 cm^2
- ¿Cuál es el área hexágono? 17.4 cm^2
- Describe, ¿qué procedimiento debiste seguir para encontrar el área de estos polígonos regulares conociendo únicamente el valor de cada lado. Primero se calculó el perímetro de la figura, después se obtuvo la apotema apoyándonos en el teorema de Pitágoras y por último se sustituyeron en la fórmula que corresponde al área de un polígono regular.

2. Contrasta tus respuestas con las de tus compañeros y analicen sus procedimientos. Con la ayuda del profesor determina: ¿cuál es la manera de plantear una función trigonométrica?, cuál es el algoritmo que permite resolverla y cómo es posible verificar que el resultado es correcto.

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos, analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

   a) Un pentágono está inscrito en una circunferencia y sólo se conoce la media de su apotema de 4 cm, si se desea conocer el área de la superficie indicada en color gris, ¿qué estrategia es posible utilizar para encontrar cuánto mide? Se calculó el área del pentágono y después el área de la circunferencia, y a ésta se le resto el área del pentágono.



   - ¿Qué procedimientos auxiliares es necesario utilizar? Con el uso de las funciones trigonométricas apoyándonos en el teorema de Pitágoras.
   - ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia? 4.9 cm
   - ¿Qué expresión trigonométrica utilizaron? $r = \frac{4}{\sin 54}$

   b) En su cuaderno, tracen el triángulo resuelto que les perimitirá encontrar los datos para conocer la diferencia de superficies.

   - ¿Cuánto mide la superficie sombreada de color gris? $A = 18.79$ cm^2
   - ¿Cómo se puede comprobar este dato? Sumando el área del pentágono con la superficie sombreada en color gris, de donde obtendremos el área total de la circunferencia.

2. Comparen sus resultados grupalmente y determinen cuál es la importancia de saber combinar los procedimientos trigonométricos con otros conocimientos algebraicos, geométricos y aritméticos, en la resolución de problemas complejos.

190

Qué observar

Este problema es un verdadero reto para los alumnos, requiere la combinación de varios procesos y el uso de lo que aprendieron más sus conocimientos previos. Vigile que el alumno es capaz de orientarse adecuadamente en el procedimiento de solución, y sobre todo que entiende el porqué de la secuencia de operaciones que deben realizarse.

Cómo enriquecer la actividad

Permita que los alumnos trabajen y debatan las estrategias de solución. Pida que realicen en su cuaderno las operaciones completas en el orden adecuado y, al final de la clase, realice una pequeña síntesis de cuál fue el procedimiento para encontrar el resultado final.

Bitácora pedagógica

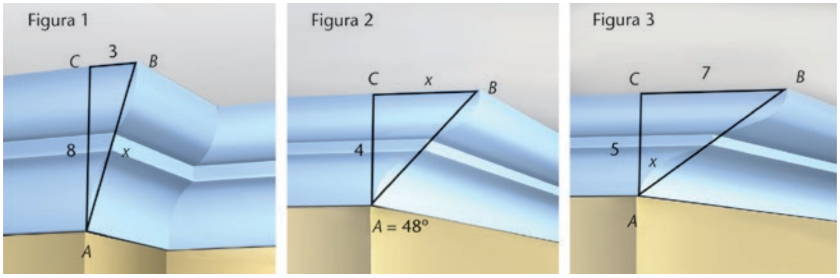
BLOQUE 4

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 4	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

ACUÉRDATE DE...

1. Analicen la situación planteada y encuentren los datos que se solicitan.

   a) En una empresa de decoración hacen cenefas de muchos tipos, actualmente están diseñando las que se colocan entre la pared y el techo, éstas se crean a base de triángulos rectángulos, como se muestra en la imagen. Para decidir el nuevo diseño se están estudiando estas propuestas.



- ¿De qué manera se puede investigar el valor de x para la figura 1? Con el teorema de Pitágoras.
- ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo de la figura 1? 8.5
- ¿Cómo es posible investigar el valor del $\overline{CB}$, es decir, el valor de x para la figura 2? Con la función tangente.
- ¿Cuál es el valor de x para la figura 2? 4.44
- ¿Qué estrategia proponen o de qué manera es posible conocer la medida del ángulo A para la figura 3? Con la función tangente inversa se puede obtener el ángulo A.
- ¿Cuál es la medida del $\measuredangle A$? 54.46°
- ¿Consideran que la medida que obtuvieron es precisa? Es aproximada a la real.
  Justifiquen su respuesta. Al calcular un resultado con el uso de las funciones nos dará un resultado aproximado que tal vez en algunas ocasiones es igual.
- ¿De qué manera es posible comprobar este último resultado? Obteniendo el ángulo B y después realizando la diferencia de los ángulos agudos.

2. Comparen sus respuestas y propuestas de solución con los de otros equipos y con la ayuda del profesor establezcan cuál es la diferencia en el procedimiento de solución para estas tres figuras: después definan qué nuevo reto contiene el triángulo de la figura 3.

191

Qué observar

En esta sección es importante observar la forma como los alumnos plantean el procedimiento que da solución a cada situación. Verifique que lo hacen con base en un argumento y no en una suposición. Oriéntelos en el sentido de las condiciones que generan los datos dados y pida que expliquen cuál es la diferencia entre ellos.

Cómo enriquecer la actividad

Una vez que tengan todos los resultados, pida a los alumnos que "experimenten" con ellos, resolviendo nuevamente estas situaciones pero ahora tomando como incógnita cualquiera de los datos dados, los resultados deben coincidir; sin embargo, los planteamientos son distintos. Pídales que expliquen algunas de las estrategias que utilizaron, y sobre todo que justifiquen por qué consideran que es la mejor manera de resolverlos.

Bitácora pedagógica

Recursos y materiales

Puede pedir a los alumnos popotes, o pajillas, para que con ellos construyan diferentes triángulos rectángulos y observen cómo varía el ángulo agudo de cada uno de los triángulos formados.

Qué observar

Verifique que los trazos que realicen los alumnos sean adecuados, así como la toma de las medidas. Vigile que al momento de calcular las medidas con funciones las comparen con las que obtuvieron manualmente y que determinen si hubo un margen de error grande o pequeño.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que en su cuaderno realicen esta actividad utilizando triángulos rectángulos de un tamaño adecuado para tomar sus medidas lo mejor posible y que comparen los resultados con el que da el equipo de geometría, que se obtienen realizando operaciones.

Curiosidades, acertijos y más

Babilonia es un reino que se encuentra en la región de Mesopotamia, cerca del actual Irak. Fue la cuna del conocimiento; se fundó en el año 2500 a.C., y su final alrededor del año 550 a.C.

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 4.1

1. Lean la siguiente situación y diseñen una estrategia que les permita realizar esta actividad.
   a) Tracen en su cuaderno un triángulo rectángulo con las dimensiones que consideren más adecuadas.
   b) Con su juego de geometría midan los lados y los ángulos agudos, regístrenlos como datos del triángulo.
   c) Escriban las funciones que se obtienen a partir de los cocientes de los lados para los dos ángulos agudos.
   d) Obtengan la medida de los dos ángulos agudos por medio de una función.
   - ¿Hubo alguna diferencia entre la medida que tomaron con el transportador y la que calcularon con la función trigonométrica para los ángulos agudos? Sí

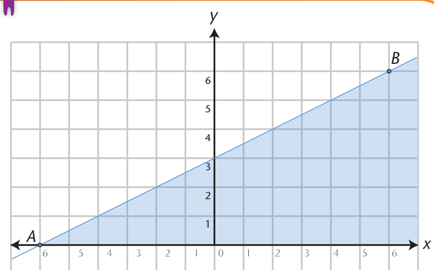
     ¿Por qué sucedió esto? El resultado de la práctica es parecido al teórico, aunque sea muy parecido y raramente es idéntico.
   - Si la suma de estos dos ángulos siempre es 90°, ¿cuál es el margen de error que se presentó?

     En este caso no hubo margen de error.
2. Formen un grupo de trabajo con otro equipo e intercambien sus triángulos, valoren las operaciones, procedimientos y resultados, comenten sus diferencias y con la ayuda del profesor verifiquen sus resultados.

PRACTÍCALO

Actividad 4.2

1. Analicen y resuelvan esta situación.
   a) Diseñen una estrategia para trazar dentro de la zona sombreada con azul al menos 3 triángulos de diferente tamaño a intervalos regulares sobre el eje x que tengan como hipotenusa la $\overline{AB}$.
   b) Marquen el menor de los ángulos agudos.
   c) Completen la tabla y contesten las preguntas.



Triángulo	Cateto 1	Cateto 2	Función	Cociente
1	6	12	$\tan A = \frac{6}{12}$	$\frac{1}{2}$
2	4	8	$\tan A = \frac{4}{8}$	$\frac{1}{2}$
3	2	4	$\tan A = \frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$

- ¿Qué estrategia utilizaron para trazar los tres triángulos?

  Se trazaron los tres triángulos de la misma forma, pero con dimensiones diferentes.
- ¿Los triángulos son semejantes? Sí
- ¿Por qué ocurrió esto? Porque se tomó el mismo punto de referencia para poder trazarlos.
- ¿Cuál es la razón que permite encontrar la relación entre los catetos de estos triángulos?

  $\tan A = \frac{cateto1}{cateto2}$
- Para el primer triángulo que trazaron escriban, ¿cuál es la función y la razón que representa el valor del ángulo agudo? La función es $\tan A = \frac{6}{12}$ y la razón es $\frac{1}{2}$

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

- ¿Cuál es la expresión para el segundo triángulo? $\tan A = \frac{4}{8}$
- ¿Y para el tercero? $\tan A = \frac{2}{4}$
- ¿Qué relación pueden observar entre los tres cocientes? Son iguales
- ¿Por qué ocurre esto? La razón de la tangente es igual puesto que se utilizó el mismo punto de referencia para trazarlos.
- De acuerdo con su punto de vista, ¿qué utilidad tiene conocer estas cantidades? Con estas cantidades podremos obtener los ángulos agudos de los triángulos.
- Si calculan los cocientes basándose en el ángulo *B*, ¿qué relación observan entre las cantidades obtenidas? Son casi iguales

  ¿Cómo expresarían la relación que hay entre los cocientes obtenidos a partir de los catetos de un triángulo en relación a los ángulos agudos? Son de igual proporción a la pendiente de estos.
- Si la ecuación de esta recta es $y = \frac{1}{2}x + 3$, ¿qué relación tienen los resultados anteriores con el valor de la pendiente $m = \frac{1}{2}$ tomado del coeficiente del término de primer grado? La razón de los ángulos es igual a la pendiente.
- ¿Cómo explicarían con sus propias palabras cuál es la relación entre el cociente de los catetos, el ángulo de inclinación de una recta con respecto al eje *x* y el valor de la pendiente de la recta? Estos serán iguales puesto que presentan el mismo ángulo y la expresión algebraica es dependiente a éste.

2. Contrasten sus resultados con los de algunas parejas cercanas y con la ayuda del profesor elaboren en su cuaderno una hipótesis formal sobre cuál es la relación entre la pendiente, el ángulo y el cociente entre los catetos.

Qué observar

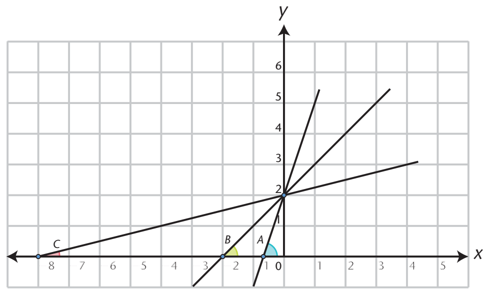
Verifique que la tabla sea llenada correctamente, observe que los alumnos comprenden la relación entre las medidas obtenidas y la razón entre ellas; esto es importante para que puedan responder las preguntas correctamente. Dé el tiempo suficiente para esta actividad y permita que las parejas tengan oportunidad de comentar sus opiniones y validar sus resultados.

PRACTÍCALO

Actividad 4.3

1. Lee y contesta las preguntas con base en la gráfica dada.

   a) Las rectas mostradas en la gráfica, tienen la forma $y = mx + b$. Analiza cada una y completa los datos de la tabla.



Ángulo	Cateto 1	Cateto 2	Función	Cociente
A	2	0.75	$\tan A = \frac{2}{0.75}$	2.66
B	2	2	$\tan B = \frac{2}{2}$	1
C	2	8	$\tan C = \frac{2}{8}$	0.25

Cómo enriquecer la actividad

Analice frente al grupo algunas de las situaciones que presenten diferencias en su planteamiento y resalte las similitudes que se den en sus conclusiones. Esta es una buena oportunidad para enfatizar la forma $y = mx + b$ de la recta y la relación que tiene con la pendiente.

Reflexión

Perseverancia significa ser constante y firme en lo que se quiere y en los buenos hábitos. Para lograr las metas o cambios positivos que una persona se propone, es necesario ser perseverante.

Bitácora pedagógica

193

Qué observar

Cuando se calculan ángulos es común que a los alumnos se les complique un poco este procedimiento; verifique que hacen el uso correcto de la calculadora y que expresan sus resultados adecuadamente.

Cómo enriquecer la actividad

Esta es una buena oportunidad para enfatizar la escritura de los ángulos en forma decimal y en grados, minutos y segundos, tome en cuenta que algunas calculadoras dan así los resultados. Motive a los alumnos para que comparen sus procedimientos, validen sus resultados, y sobre todo que comprenden el significado y propósito de estos.

Transversalidad

Ciencias 2, Física

La realización de gráficas lineales en esta materia es muy común. Pida a los alumnos que repasen en qué temas de Ciencias 2 realizaron, en un mismo plano, varias gráficas lineales y que observen cómo se comportaba el ángulo agudo del triángulo que se forma con respecto al eje *x*.

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Cuál es la razón para calcular el ángulo *A*? 2.66
- ¿Cómo determinaste esta función? Al conocer el valor de los catetos sabemos que podemos utilizar la función tangente.
- ¿Cuál es la razón para calcular el ángulo *B*? 1
- Y, ¿para el ángulo *C*? 0.25
- ¿Utilizaste el mismo procedimiento? Sí Justifica tu respuesta. Tenemos los mismos datos de los tres triángulos.
- ¿Qué tienen en común estas tres razones? La dimensión del cateto 1 es la misma para los tres casos.
- Entonces, ¿cuál es el valor de *b*? 2
- Escribe la amplitud de cada ángulo $\sphericalangle A =$ 69.39° $\sphericalangle B =$ 45° $\sphericalangle C =$ 14°
- ¿Qué procedimiento te permitió calcular estos tres ángulos? La inversa de la función tangente.
- ¿Cuál es la ecuación de la recta que forma el $\sphericalangle A$? $A = \tan^{-1} 2.66$
- ¿Cuál es la ecuación para la recta que forma el $\sphericalangle B$? $B = \tan^{-1} 1$
- Y ¿para la recta que forma el $\sphericalangle C$? $C = \tan^{-1} 0.25$

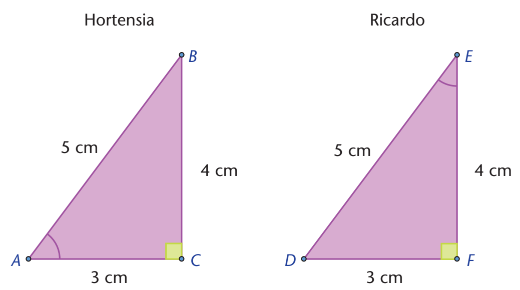
2. Contrasta tus resultados con los de tus compañeros y con la ayuda de tu profesor determina cuál es la relación entre la medida del ángulo y el valor de la pendiente en rectas que tienen diferente pendiente.

PRACTÍCALO

Actividad 4.4

1. El maestro de matemáticas de Hortensia y Ricardo, organizó un trabajo en parejas con la intención de que investigaran sobre la relación entre las funciones que se obtienen a partir de dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Para ello, cada integrante deberá trabajar con uno de los ángulos agudos. Hortensia tomó el ángulo agudo de mayor tamaño; y Ricardo, el menor.

Analicen la imagen y contesten las preguntas.



a) El triángulo de Hortensia.
- El cociente entre el cateto opuesto al ángulo *A* y la hipotenusa 0.8

  Entonces, ¿cuál es el valor del $\sphericalangle A$? 53.13°
- El cociente entre el cateto adyacente al ángulo A y la hipotenusa 0.6

  Entonces, ¿cuál es el valor del $\sphericalangle A$? 53.13°

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

b) El triángulo de Ricardo.

- El cociente entre el cateto opuesto al ángulo *E* y la hipotenusa 0.6

  Entonces, ¿cuál es el valor del ∢ *E*? 36.86°
- El cociente entre el cateto adyacente al ángulo *E* y la hipotenusa 0.8
- El cociente entre el cateto opuesto de *E* y el cateto adyacente 0.75
- Entonces, ¿cuál es el valor del ∢ *E*? 36.86°

c) ¿Qué tienen en común los ángulos que calculó Hortensia? Son iguales

- ¿Por qué ocurrió esto? El ángulo calculado debe de ser el mismo sin importar la función que sea utilizada.
- ¿Se presentó una situación similar con Ricardo o fue distinta? Fue similar
- Justifiquen su respuesta. Se realizó el mismo procedimiento tomando en consideración que también se trata de un ángulo agudo.
- ¿Qué procedimiento emplearon para calcular el valor de los ángulos para estas funciones? Se calculó el cociente de la función dada y se comprobó que para todos los casos el resultado fue el mismo.

2. Comparen sus resultados con los de otros equipos y con la ayuda del profesor ofrezcan una explicación que indique porqué al calcular las funciones para un ángulo agudo conociendo el valor de los tres lados del triángulo da como resultado la misma medida angular.

PRACTÍCALO **Actividad 4.5**

1. El profesor de Hortensia y Ricardo les lanzó un reto al terminar la clase, mostró un triángulo rectángulo y dijo: "Analicen este triángulo y encuentren, ¿por qué es diferente éste a los que han visto hasta el momento?".

   a) Contesten las preguntas.

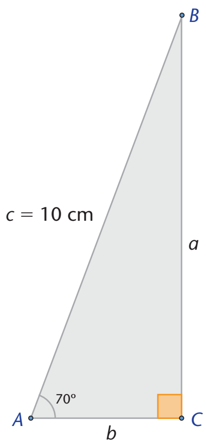
   - ¿Cuál es la expresión que permite calcular el valor del cateto *a*?

     $a = 10(\sin 70)$

     ¿Cuánto mide el cateto *a*? 9.39 cm
   - ¿Cuál es la expresión que permite calcular el valor del cateto *b*?

     $b = 10(\cos 70)$

     ¿Cuánto mide el cateto *b*? 3.42 cm
   - ¿Qué diferencia hay entre estas dos expresiones al compararlas con las que usaron en las secciones anteriores? En este caso se utilizan las funciones como tales, puesto que anteriormente se utilizó el inverso de éstas.



Qué observar

El propósito de esta actividad es analizar las funciones trigonométricas y los resultados que se dan con base en distintos datos. Observe que los alumnos deducen correctamente estas relaciones y que son capaces de poder explicarlas, justificando por qué ocurren.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que realicen esta actividad con triángulos rectángulos de diferentes dimensiones, para que verifiquen si es que esto ocurre con todos los triángulos rectángulos. Esto les va a permitir reafirmar sus procedimientos y brindarles seguridad en sus planteamientos.

Reflexión

Respeto es "dar atención"; por lo tanto, respetar a alguien es darle la atención que se merece. Si no hay respeto entre los miembros de un grupo, no existe un medio adecuado para que sus integrantes participen en la solución de sus problemas.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Ponga especial atención al planteamiento de las operaciones y en su solución, verifique que los alumnos comprueben sus resultados.

Cómo enriquecer la actividad

Una vez que conozcan los datos, pida a los alumnos que simulen que la incógnita es la hipotenusa y que describan cuál es la diferencia en las operaciones que tuvieron que realizar.

Recursos y materiales

En la página *Recursostic* encontrará información que le permitirá trabajar este tema con los alumnos.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/resolver_tri_rectangulos_pjge/Triangulos_rectangulos1.htm

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿En qué se modifica el algoritmo para encontrar el valor de los catetos si la incógnita se encuentra en el dividendo y no en el divisor? En vez de obtener el resultado mediante un producto se realizará por medio de un cociente.

- ¿Consideran que es posible obtener estos resultados de alguna manera distinta? Sí, puesto que siempre existe más de una manera para llegar al mismo resultado.

- Justifiquen su respuesta. Podemos hacer uso de una función diferente donde se pueda hacer uso de los datos proporcionados.

2. Comparen sus resultados con los de otras parejas y con la ayuda del profesor determinen cuál es la diferencia en el algoritmo cuando una expresión, que es resultado de un cociente entre dos de los lados de un triángulo, tiene la incógnita en el dividendo de cuando la tiene en el divisor.

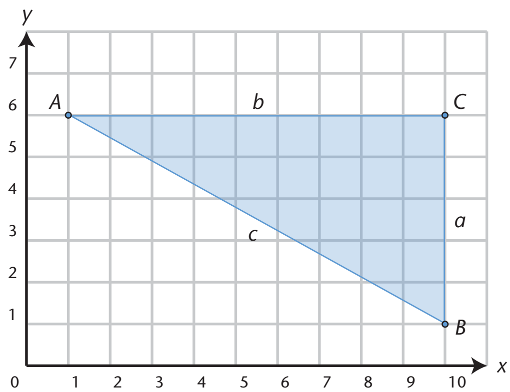
Para leer más

Los cocientes obtenidos al relacionar dos de los lados de un triángulo rectángulo se pueden utilizar para calcular el valor de alguno de los ángulos agudos, y se relacionan entre sí porque sus expresiones son recíprocas.

LO QUE APRENDÍ

1. Observa la gráfica y resuelve el triángulo rectángulo.

   a) En el plano cartesiano se muestra un triángulo rectángulo que tiene indicados, por medio de letras, tanto sus lados como sus ángulos, analiza la imagen y responde las preguntas.



- ¿Cuál es la medida del ∢ *A*? 29°
- ¿Cuál es la medida del ∢ *B*? 61°
- ¿Cuánto mide *a*? 5
- ¿Cuánto mide *b*? 9
- ¿Cuánto mide *c*? 10.29
- ¿Cuántas funciones fueron necesarias para resolver el triángulo? Dos
- Escribe las expresiones que usaste.

Para calcular el ángulo A la función utilizada fue $A = \tan^{-1} 0.55$ y para el ángulo B fue $B = \tan^{-1} 1.8$.

Bitácora pedagógica

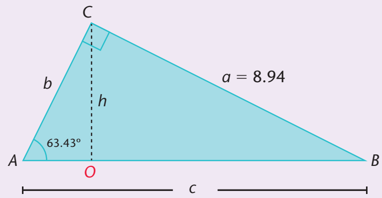
BLOQUE 4

- Describe brevemente el procedimiento que empleaste. Se calculó la razón tangente de los catetos y se realizó el despeje correspondiente.
- ¿Cómo es posible comprobar que tus resultados son correctos? Con el teorema de Pitágoras, de donde obtendremos la hipotenusa y después utilizar una función trigonométrica, tal como las funciones seno o coseno.

2. Contrasta tus resultados con los de tus compañeros y con la ayuda del profesor determina qué procedimiento se utiliza para encontrar el valor de algún lado o ángulo de un triángulo rectángulo cuando éste está dado con base en las coordenadas de un plano cartesiano.

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos y analicen el triángulo que se muestra abajo. Diseñen una estrategia que consideren les permitirá encontrar los valores de las incógnitas.
   a) Resuelvan este triángulo rectángulo y determinen el valor de la altura (h).



- ¿Cuánto mide la hipotenusa c? 9.99
- ¿Cuánto mide el cateto b? 4.47
- ¿Cuánto mide el $\sphericalangle$B? 26.57
- Expliquen brevemente, ¿cuál fue el procedimiento para encontrar la altura del triángulo? Se obtuvo la dimensión del cateto b y después se utilizó la función seno junto con el ángulo A.
- En realidad, ¿cuántos triángulos se forman en el triángulo rectángulo al trazar la altura? Tres De acuerdo con sus vértices, nombren los triángulos que se forman. Son triángulos rectángulos
- ¿Cuántos ángulos rectos presenta la figura? Tres
- ¿Es posible investigar el valor de h de alguna otra manera? Sí

  Expliquen su respuesta. Utilizando la función coseno obteniendo el ángulo B y con ayuda del cateto a.
- ¿Cómo es posible investigar el valor del $\overline{OB}$? Utilizando el teorema de Pitágoras.

2. Comparen sus respuestas con las de otro equipo y con la ayuda del profesor determinen cuál es la importancia de hacer un planteamiento adecuado para este tipo de situaciones, y qué repercusión tiene en el planteamiento del método de solución.

Qué observar

Verifique que los alumnos resuelvan esta situación de manera autónoma y con seguridad en sus procedimientos. Revise que realizan las operaciones completas y que comprueban sus resultados. Dé el tiempo suficiente para esta actividad y, de ser posible, asegúrese de que utilizan adecuadamente su calculadora.

Cómo enriquecer la actividad

Puede complementar esta actividad pidiendo a algunos alumnos que expongan sus métodos de solución en el pizarrón, analícelos junto con ellos y determinen cuál es la manera más adecuada de solucionarlos. Tenga en cuenta que este reto tiene un grado de dificultad más alto que los anteriores.

Transversalidad

Historia 1

Pida a sus alumnos que realicen de manera breve una descripción de las condiciones socioculturales de la antigua Babilonia, y que mencionen qué aportaciones dieron a la humanidad.

Bitácora pedagógica

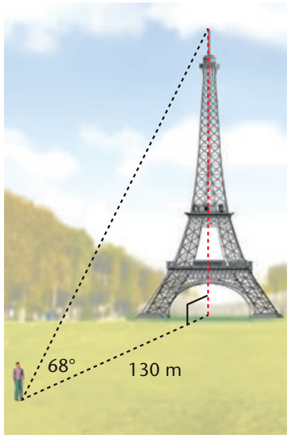
Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 5	Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

ACUÉRDATE DE...

1. Analicen y resuelvan la situación dada.

   a) Antonio fue de viaje a Francia, al visitar la Torre Eiffel quiso saber cuál es su altura, pero sólo pudo obtener dos medidas: la distancia de donde él se encuentra al centro de la base de la torre y el ángulo de elevación hasta la punta de la torre.

   Ayuden a Antonio a encontrar la altura de la Torre Eiffel.

   - ¿Cuánto mide la altura? 321.76 m
   - ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar el resultado? Con la función tangente a partir de un triángulo rectángulo.
   - ¿Cuál es la expresión trigonométrica que modela esta situación? $x = 130(\tan 68)$
   - ¿A qué distancia se encuentra Antonio de la cúspide de la Torre Eiffel? 347.03 m
   - ¿Utilizaron el mismo procedimiento para encontrar el resultado? Sí
   - Expliquen su respuesta. Se obtuvo con el uso de una función trigonométrica.
   - ¿Es posible encontrar la cúspide de la torre utilizando algún otro procedimiento? Sí

     ¿Por qué ocurre esto? Porque puede ser calculado con instrumentos de medición.

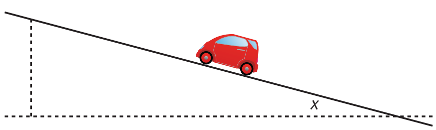
2. Comparen sus resultados con los de otras parejas y con la ayuda del profesor verifiquen que sus planteamientos y resultados sean correctos.

PRACTÍCALO

Actividad 5.1

1. Para construir una nueva carretera hacia una montaña los ingenieros decidieron que por cada 1500 m que recorran los autos deben ascender 300 m.

   a) ¿Cuántos grados de elevación debe tener la carretera para cumplir con la distancia recorrida y los metros ascendidos? 11.3°

   - ¿De qué manera encontraron el valor del ángulo? Utilizando la función tangente.
   - ¿Cuál es la expresión trigonométrica que modela esta situación? $x = \tan^{-1}\frac{300}{1500}$

Qué observar

Asegúrese de que los alumnos hacen correctamente el planteamiento de la expresión trigonométrica que permite encontrar la altura de la torre; observe que comprueben su resultado y que sean capaces de justificar sus procedimientos.

Cómo enriquecer la actividad

Puede complementar esta actividad si les solicita que midan la altura de objetos cercanos de gran tamaño, puede ser un árbol o la altura del edificio de su escuela, seguramente esto les hará crear estrategias nuevas para poder medir el ángulo de inclinación necesario. Si lo considera prudente, proporciónele algunas técnicas, pero antes permita que diseñen sus propias estrategias.

Recursos y materiales

En la página *Educaplus* encontrará una aplicación para los valores de seno y coseno, la cual le permitirá enriquecer su clase.

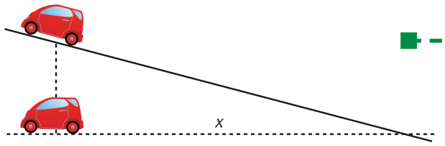
http://www.educaplus.org/play-102-Valores-del-seno.html

http://www.educaplus.org/play-101-Valores-del-coseno.html

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

b) Si un vehículo hubiera hecho el recorrido de manera horizontal, ¿qué distancia habría recorrido cuando el auto que va sobre la nueva carretera llegue a los primeros 1 500 m? 1470.92 m

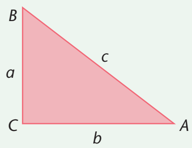


- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar este resultado? Con el teorema de Pitágoras
- ¿Qué función trigonométrica se puede utilizar para modelar esta situación? $x = 1500(\cos 11.3)$

2. Comparen sus resultados con los de los otros equipos y con la ayuda del profesor determinen qué funciones son las más adecuadas para resolver estas situaciones y cuáles son los datos que se deben observar para poder definirla.

Para tener en cuenta

Las relaciones entre las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo muestran equivalencias entre sí.

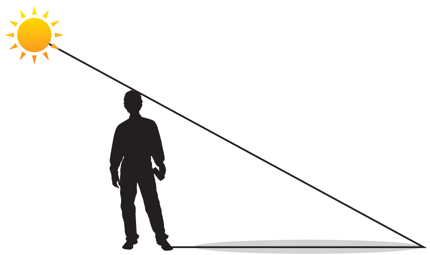


$SenA = \frac{a}{c}$	$SenB = \frac{b}{c}$
$CosA = \frac{b}{c}$	$CosB = \frac{a}{c}$
$TanA = \frac{a}{b}$	$TanB = \frac{b}{a}$

PRACTÍCALO **Actividad 5.2**

1. Analicen la siguiente situación y resuelvan la actividad.

Luis mide 1.85 m de estatura, al estar de pie en cierto momento del día proyectó una sombra de 2.3 m.



- ¿Con qué ángulo están llegando los rayos del Sol a la superficie del suelo? 38.81°
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar este resultado? Con el teorema de Pitágoras.
- ¿Cuál es la función trigonométrica que modela esta situación? $x = \tan^{-1}\frac{1.85}{2.3}$
- ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto? Calculando el otro ángulo agudo.
- ¿Existe la posibilidad de encontrar el ángulo con otro procedimiento? Sí
- Si Luis hubiera tenido una estatura de 1.70 m, ¿qué longitud hubiera tenido la sombra que proyecta? 2.71 m
- ¿Qué expresión modela esta situación? $x = \frac{1.7}{\sin 38.81}$

2. Analicen y contrasten sus respuestas con las de otra pareja y, con la ayuda del profesor, verifiquen que sus resultados sean correctos.

Qué observar

Nuevamente en esta situación el planteamiento es muy importante, vigile que los alumnos sean capaces de deducir y justificar la operación que permite llegar al resultado. Revise el uso correcto de la calculadora y la comprensión que tienen con respecto a la solución.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que trabajen de manera individual para plantear y resolver una situación similar a la que se muestra. Cuando terminen, organice parejas o equipos para debatir los procedimientos, planteamientos, estrategias o métodos que utilizaron. Luego pídales que elaboren una conclusión y comparta algunas frente al grupo.

Curiosidades, acertijos y más

El matemático y astrónomo griego Hiparco de Nicea (190-120 a.C.), construyó una tabla de cuerdas, que equivale a la tabla moderna de senos. Con esta tabla relacionó con facilidad los lados y los ángulos de todo triángulo.

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

Qué observar

Permita que el alumno resuelva este problema, procure intervenir lo menos posible. Analice los planteamientos y métodos que utiliza para resolver la situación y ponga especial atención en cómo resuelve la situación, considerando la altura del instrumento de medición que se está utilizando.

Cómo enriquecer la actividad

Esta actividad es conveniente analizarla en el pizarrón, después de haber sido resuelta. Valore los comentarios que puedan hacer los alumnos y permita que elaboren una conclusión, lo más breve posible, que explique cuál es el procedimiento para encontrar una altura calculada por medio de dos figuras.

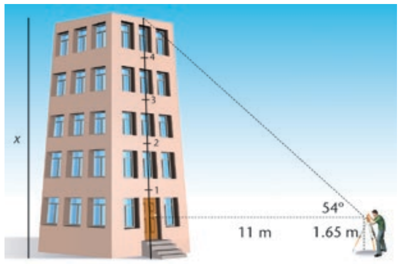
Reflexión

Vigile los tipos de liderazgo que se presentan al interior de cada equipo; no es conveniente que el expositor siempre sea el mismo. Establezca normas de responsabilidad, respeto, cooperación, etc., para que formen equipos eficaces.

PRACTÍCALO

Actividad 5.3

1. Javier es topógrafo y está tomando las medidas de un edificio, el aparato que utiliza toma las medidas de 1.65 m de altura. Tomando como base los datos que muestra la imagen contesta lo que se te indica.



- ¿Cuál es la altura del edificio? 16.79 m
- ¿Qué estrategia utilizaste para calcularla? Utilizando la función trigonométrica tangente.

a) Si Javier sabe que los pisos del edificio tienen la misma altura, ¿a qué altura se encuentra cada piso? Completa la tabla.

Piso	1	2	3	4	5
Altura	3.35	6.71	10.06	13.41	16.79

- ¿Cuál es el ángulo de elevación que Javier medirá hasta el cuarto piso? 50.63°
- ¿De qué manera determinaste este dato? Utilizando la inversa de la función tangente.
- ¿Cuál es el ángulo que medirá Javier hasta el tercer piso? 42.44°
- ¿Qué expresión trigonométrica te permite encontrar esos ángulos? $x = \tan^{-1}(\frac{h}{11})$
- Si Javier coloca su instrumento de medición a nivel del piso, ¿qué ángulo mediría hasta la parte más alta del edificio? 56.76° ¿Cómo determinaste este resultado? Igual a los anteriores.

2. Comparte tus procedimientos y resultados con algunos de tus compañeros, analiza y comenta los que ellos realizaron, y con la ayuda del profesor determina de qué manera se pueden emplear las funciones trigonométricas cuando hay que resolver un problema que presenta operaciones recurrentes.

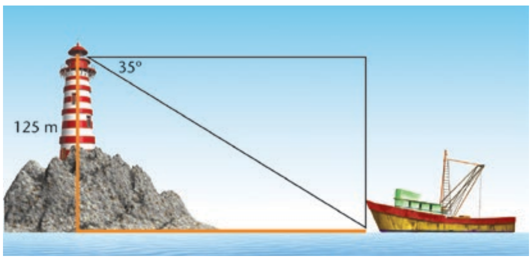
Para tener en cuenta

Para calcular el ángulo agudo de un triángulo rectángulo con base en dos de sus lados se utiliza la función trigonométrica elevada a la potencia -1, es decir, *sen*$^{-1}$, *cos*$^{-1}$ y *tan*$^{-1}$. Regularmente, estas funciones se encuentran como *segunda función* en las calculadoras científicas.

PRACTÍCALO

Actividad 5.4

1. Analicen las imágenes mostradas y determinen el valor del lado o ángulo indicado con la letra *x*.



Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

a) Desde lo alto de un faro se observa un barco con un **ángulo de depresión** de 35°, si la altura del faro es de 125 m, ¿cuál es la distancia entre el faro y el barco? 217.93 m

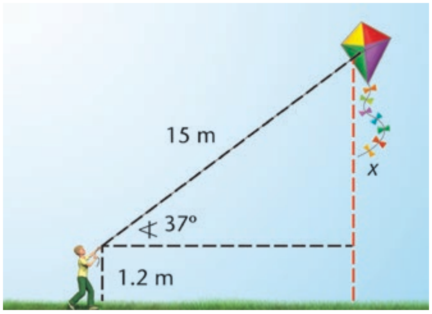
Glosario

Ángulo de depresión. Es el que se forma por debajo de la línea paralela al horizonte que se toma como referencia.

- Expliquen, ¿cuál es la estrategia que permite encontrar la distancia? Con el ángulo de inclinación y la altura del faro podemos calcularlo imaginando un triángulo rectángulo, utilizando funciones trigonométricas.
- ¿Cuál es la expresión trigonométrica que permite encontrar la distancia? $x = \frac{125}{\sin 35}$

Justifiquen su respuesta. La distancia entre el faro y el barco es la hipotenusa de nuestro triángulo imaginado.

b) Un niño desea conocer la altura a la que vuela su papalote, para ello realizó marcas a un metro de distancia sobre el hilo que utilizaría y midió el ángulo de elevación. Contó 15 m de hilo y midió un ángulo aproximado de 37°.

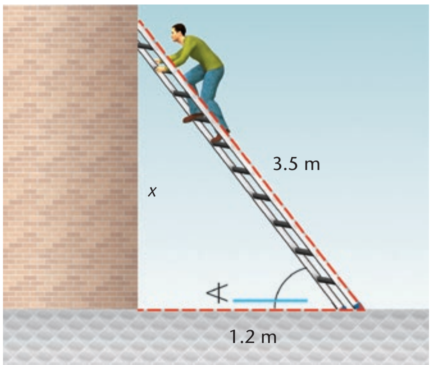


- Expliquen, ¿cuál es la estrategia para encontrar la altura a la que el papalote vuela? Con el uso de la función seno.
- ¿Qué función trigonométrica permite encontrar el valor de x? $x = 15\sin 37 + 1.2$

Justifiquen su respuesta. Este se obtiene al plantear un triángulo rectángulo y aumentarle 1.2 m

- ¿Cuál es el la altura del papalote? 3.28 m

c) Una escalera de 3.5 m de longitud es colocada en una pared. Se sabe que la distancia de la pared a la base de la escalera es 1.2 m, ¿cuál es la altura que alcanza la escalera y el ángulo de elevación con respecto al piso? 3.28 m



- ¿Qué estrategia permite encontrar el ángulo que forma la escalera con respecto al piso? Con la función coseno.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? $\alpha = \cos^{-1}\frac{1.2}{3.5}$
- ¿Cuál expresión trigonométrica permite encontrar el valor de la altura x? $x = \sqrt{3.5^2 - 1.2^2}$
- ¿Es posible encontrar el valor de x mediante algún otro procedimiento? Sí

Justifiquen su respuesta. Se puede obtener mediante el uso de una función trigonométrica tal como el seno o el coseno.

2. Contrasten sus resultados con los de otras parejas y con la ayuda del profesor verifiquen sus planteamientos y justifiquen que sean correctos; determinen si utilizaron el procedimiento más adecuado.

Qué observar

Organice a las parejas de trabajo de manera que puedan realizar los planteamientos juntos y hacer operaciones. Al analizar varias situaciones, deben tener muy clara la justificación de los planteamientos, ponga atención en que verifiquen por sí mismos sus resultados y se cercioren de que las respuestas son correctas.

Cómo enriquecer la actividad

Si tiene el tiempo necesario, pida a algunas parejas que resuelvan y expliquen cómo encontraron las respuestas solicitadas. De ser necesario, aclare con ellos las dudas que surjan y al final expliquen cuál fue el procedimiento para plantear las expresiones que modelan cada situación.

Curiosidades, acertijos y más

A mediados del siglo XVII, Isaac Newton encontró la serie para el seno (senx), coseno (cosx) y tangente (tgx). Con la invención del cálculo, estas funciones fueron incorporadas a otra rama de las Matemáticas "el cálculo".

Bitácora pedagógica

Qué observar

Permita que el alumno resuelva este problema por sus propios medios; trate de ser solo un observador y calcule el tiempo que considere necesario para aclarar dudas, pero hasta que la mayoría de los alumnos termine la actividad.

Cómo enriquecer la actividad

Relacione las características de esta actividad con las vistas anteriormente. Pida que elaboren un esquema en su cuaderno para cada uno de los triángulos que se forman y que expliquen de manera concreta qué procedimientos usaron para obtener el valor de *x* y el ángulo de elevación solicitado.

Transversalidad

Historia 1

Pida a los alumnos que repasen la historia de los árabes y mencionen las aportaciones que realizaron a las Matemáticas, la astronomía y a la ciencia.

Matemáticas 3. Por competencias

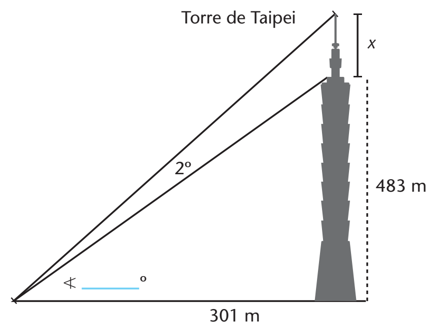
Para leer más

Determinar la función trigonométrica que modela una situación se hace siempre con base en dos dimensiones conocidas, ya sea un ángulo y un lado o bien dos lados del triángulo e identificando el o los catetos y la hipotenusa con base en el ángulo dado.

En un triángulo rectángulo la función *seno* de uno de sus ángulos agudos equivale a la función *coseno* del otro ángulo agudo y la comparación entre la razón de la función *tangente* de cada ángulo agudo es el inverso multiplicativo o recíproco.

LO QUE APRENDÍ

1. La Torre de Taipei es considerada uno de los edificios más altos del mundo, tan sólo la zona de pisos tiene una altura de 483 m, con este dato, una persona se alejó 301 m para investigar la altura total de la torre.



- ¿Cuánto mide el ángulo de elevación hasta donde termina la zona de pisos? 58°
- ¿Qué estrategia utilizaste para investigar esta medida? Como los datos proporcionados en este caso son los dos catetos del triángulo rectángulo se utiliza la función tangente.
- ¿Qué función trigonométrica permite calcular este ángulo? La inversa de la función trigonométrica tangente.

Justifica tu respuesta. Porque solo conocemos las dimensiones de los catetos.

- ¿Cuánto mide en su totalidad la Torre de Taipei? 521.34 m
- ¿Cómo encontraste este resultado? Obteniendo el ángulo total que llega a la punta de la torre.
- ¿Cuál es la altura de la punta de la torre marcada con la letra *x*? 38.34 m
- ¿De qué manera determinaste este resultado? Sacando la diferencia de la altura total de la torre menos la altura donde termina la zona de pisos.

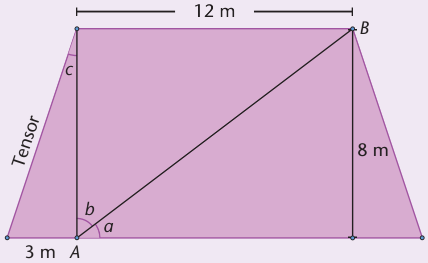
2. Compara tus respuestas con las de algunos de tus compañeros y con la ayuda del profesor determina cuál es la importancia y el procedimiento para realizar un planteamiento adecuado para resolver situaciones que requieren el uso recurrente de funciones trigonométricas.

Bitácora pedagógica

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos y resuelvan el siguiente problema.

   Para sujetar las luces en la parte frontal de un escenario se utilizaron dos postes y dos cables tensores. Analicen la figura y contesten las preguntas.



   - ¿Cuánto mide el ángulo c? 20.55°
   - ¿Qué estrategia utilizaron para calcular este ángulo? Al conocer las dimensiones de los dos catetos utilizamos la función tangente.
   - ¿Qué expresión trigonométrica modela esta situación?

     $c = \tan^{-1}\frac{3}{8}$
   - ¿Cuánto mide el ángulo b? 33.69°
   - ¿Cuánto mide el ángulo a? 33.69°
   - ¿Qué procedimiento utilizaron para calcular estos dos ángulos? Con la inversa de la función tangente, puesto que se conocen las dimensiones de los dos catetos.
   - ¿Cuánto mide la superficie del trapecio? 120 m^2
   - ¿Cuánto mide cada tensor? 8.54 m
   - ¿Qué función trigonométrica modela esta situación? El teorema de Pitágoras.

   Justifiquen su respuesta. Puesto que conocemos las dimensiones de los dos catetos y el tensor se considera la hipotenusa.

   - ¿Cuánto mide la diagonal formada entre los puntos A y B? 67.38°
   - ¿Qué expresión modela esta situación?

     $\epsilon = A + B = 33.69 + 33.69 = 67.38°$

2. Contrasten sus respuestas con las de otros equipos y con la ayuda del profesor elaboren una conclusión sobre cuál es la forma que consideran más conveniente para resolver situaciones como ésta. Comenten en grupo si es que hay algún otro procedimiento que permita encontrar otras soluciones a estos planteamientos.

USA LAS TIC

Visita la página http://www.vadenúmeros.es/actividades/resolucion-de-triangulos.htm (Consultada el día 8 de abril de 2013, a las 18:20 horas), en ella encontrarás un programa que te permite resolver triángulos, puedes colocar los datos de cualquiera de los casos vistos en este contenido. Inventa casos propios y después de tu visita comenta con tu profesor tu experiencia y determinen, ¿cuál es la aplicación en la vida real que puede tener este tipo de recursos?

Qué observar

Observe que los alumnos ven este trapecio como una figura compuesta por triángulos rectángulos; ponga atención en cómo plantean y encuentran los resultados, pero sobre todo si encuentran métodos deductivos sencillos que les permitan resolver esta situación de una manera fácil.

Cómo enriquecer la actividad

Cuando un alumno es capaz de explicar una situación y su método de solución, es cuando se consolida el conocimiento. Organice nuevos equipos de trabajo, pero ahora con la intención de que compartan procedimientos, operaciones y métodos de comprobación. Vigile que esto se realice con orden y en un tiempo prudente.

Bitácora pedagógica

Reflexión

Sobre la cortesía

Ser amable y mostrar buena educación no es una pérdida de tiempo. Todo lo contrario, evita problemas, resuelve conflictos, gana la buena voluntad de los demás y endulza su propia vida.

Qué observar

Permita que los alumnos establezcan su propia estrategia y obtengan sus resultados, únicamente vigile que la actividad se lleve a cabo con orden y en el tiempo estimado, deje para el final las aclaraciones y explicaciones.

Cómo enriquecer la actividad

De ser posible, reúna a dos equipos y, conservando el orden, permita que concluyan la actividad. Fomente el trabajo colaborativo y la responsabilidad que requiere para realizarse en el tiempo programado. Pida que establezcan una conclusión general que les permita establecer el tipo de relación que hay entre estas cantidades.

Recursos y materiales

Pida a los alumnos que grafiquen en su cuaderno las expresiones x, $2x$ y $3x$. Que observen qué razón es la causa de la pendiente de las rectas y qué diferencia hay con las gráficas de las expresiones $x + 1$, $2x + 2$ y $3x + 3$.

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 6	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

ACUÉRDATE DE...

1. Gabriel quiere llevar a su familia al museo de cera, pero todavía no sabe cuántos de ellos pueden asistir por lo que decidió preguntar a cada uno. En su casa viven 6 adultos y 4 niños, y en el museo la entrada cuesta \$ 75 adultos y \$ 60 niños.

- Si Gabriel va al museo únicamente con su hijo, ¿cuánto dinero gastará? \$ 135
- Si fueran solamente los adultos, ¿cuánto pagarían? \$ 450
- Si sólo fuera Gabriel y los 4 niños, ¿cuánto tendría que pagar? \$ 315
- ¿Cuánto pagaría si fuera toda la familia? \$ 690
- Si Gabriel fue con toda su familia y también llevaron a la familia de su vecino, compuesta por 4 personas (dos adultos y dos niños), ¿cuánto pagaron en total? \$ 960

  Justifiquen su respuesta. En total se pagaron las entradas de 8 adultos y 6 niños.

- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar estas cantidades? Se tomaron dos variantes que fueron el total de adultos y el total de niños después estos se sumaron.

a) Tomando las respuestas anteriores como base, completen la tabla y tracen en su cuaderno la gráfica correspondiente.

Número de personas	Precio por adulto	Precio por niño
1	\$ 75	\$ 60
2	\$ 150	\$ 120
3	\$ 225	\$ 180
4	\$ 350	\$ 240
5	\$ 475	\$ 300
6	\$ 600	\$ 360
7	\$ 675	\$ 420
8	\$ 750	\$ 480
9	\$ 825	\$ 540
10	\$ 900	\$ 600

- ¿Qué tipo de líneas se forman? Líneas rectas
- ¿Qué indica que sean de este tipo? La razón de cambio es equidistante.
- ¿Cómo pueden explicar la relación que hay entre el precio por persona y el número de personas? El precio por persona es directamente proporcional al número de personas.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

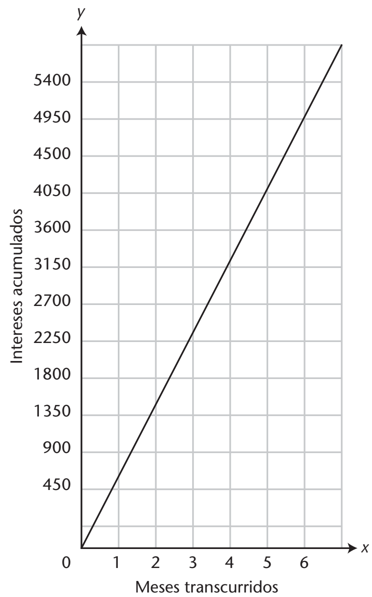
- Si Gabriel tuviera disponibles $400 y quisiera invitar a la misma cantidad de niños y adultos, ¿cuántos de cada uno puede invitar? 2 niños y 2 adultos.
- ¿Qué estrategia utilizaron para calcular este resultado? Se fue tomando un niño y un adulto a la vez verificando que no superara los $ 400.

2. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros y con la asesoría del profesor determinen cuál es la correlación entre una gráfica lineal, una relación proporcional entre dos cantidades y la inclinación que tienen las rectas trazadas.

PRACTÍCALO

Actividad 6.1

1. La señora Beatriz quiere pedirle prestada cierta cantidad de dinero a la señora Consuelo, para darle a conocer los intereses que debe pagar, la señora Consuelo le mandó una gráfica que contempla un plazo de 6 meses con un interés del 6% mensual.



a) Analicen la gráfica y respondan las preguntas.

- ¿Qué cantidad de dinero tendría que pagar la señora Beatriz de interés por cada mes? $ 900
- ¿Cómo determinaron esta cantidad. Calculando la diferencia entre el monto de cada mes.
- Calculen cuál es la diferencia entre el interés que paga entre los meses 4 y 3, y compárenla con el interés que tiene que pagar entre los meses 6 y 5. ¿Es la misma cantidad? Sí

  ¿Por qué ocurre esto? Porque la diferencia es constante.
- ¿Qué cantidad de dinero quiere pedir la señora Beatriz? $ 15,000.00
- ¿Qué estrategia utilizaron para calcular esta cantidad? Calculando la cantidad para la cual 900 es el 6 %, se puede utilizar una regla de 3.
- ¿Consideran que la relación entre los meses transcurridos y los intereses acumulados es proporcional? Sí

  Justifiquen su respuesta. Al aumentar el tiempo aumenta el interés en las mismas unidades.

  Hay otras dos personas que prestan dinero, Marlene y doña Juana, ¿qué diferencias habría en la gráfica si Marlene cobra el 10% de interés mensual con la de la señora Consuelo? La gráfica tendría una mayor inclinación.
- ¿Por qué ocurre esto? Al aumentar el tiempo aumenta el interés en las mismas unidades.
- Si doña Juana sólo cobra 4%, ¿cómo sería la gráfica de los intereses en comparación con la de la señora Consuelo? La gráfica tendría una menor inclinación.

Qué observar

Resolver esta actividad requiere procedimientos auxiliares, vigile que los alumnos analicen la situación de una manera apropiada y con seguridad. Si es necesario que los oriente, utilice preguntas en lugar de darles la respuesta.

Cómo enriquecer la actividad

La interpretación de esquemas es importante para encontrar las respuestas. De ser posible, analice la gráfica frente al grupo y cuestiónelos acerca de las alternativas que pueden utilizar para hallar las soluciones, incluso puede plantear situaciones con cantidades más pequeñas, con la intención de facilitar el análisis.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Ponga atención en la interpretación gráfica que hacen los alumnos y vigile que consideren el hecho de que en una compañía se debe pagar inscripción y en otra no, así como en lo que esto afecta el gasto que se da durante el año.

Cómo enriquecer la actividad

Analice algunas otras situaciones de la vida cotidiana, donde intervengan cantidades que se pagan a largo plazo. Resalte la importancia de conocer estos procedimientos, en lo que respecta al gasto familiar y el ahorro a largo plazo.

Reflexión

Es importante concientizar a los participantes acerca de la responsabilidad que adquieren al estar frente a un grupo. Hay que sensibilizarlos hacia la aceptación de comentarios, preguntas, dudas de los demás compañeros y de la disposición para responder en la medida de sus conocimientos.

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Consideran que las tres señoras utilizan una relación proporcional para el cobro de sus intereses? Sí Justifiquen su respuesta. Todas utilizan un interés constante para cada mes por lo tanto es proporcional.
- ¿Cuál de las tres gráficas tiene una mayor inclinación? La de Marlene
- ¿A qué se debe esto? A que cobra más interés por cada mes.
- Entonces, ¿qué relación hay entre la inclinación de la recta y el ángulo que forma con el eje *x*? Entre mayor sea el interés, mayor será la medida del ángulo.
- ¿Qué expresión algebraica representa los intereses mensuales que le cobraría la señora Consuelo a la señora Beatriz? $y = 900x$

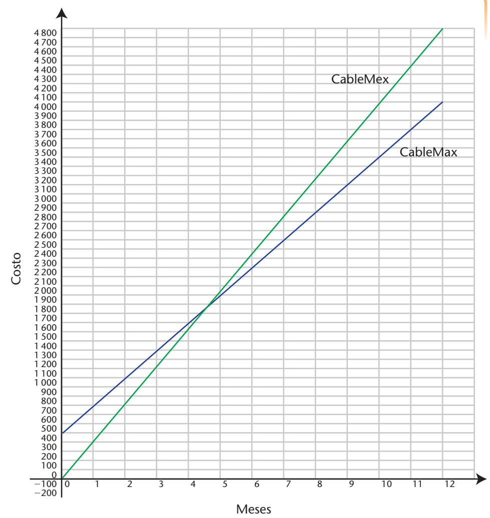
  ¿Cómo determinaron esta expresión? Analizando la progresión de los intereses acumulados.
- ¿Qué relación hay entre la expresión algebraica anterior y la pendiente de la recta? Que el coeficiente de *x* representa la pendiente de una recta.

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen la relación que hay entre el interés de un préstamo, la línea que representa y el ángulo de inclinación que forma con el eje *x*.

PRACTÍCALO

Actividad 6.2

1. Francisco y Angélica están recién casados y quieren contratar el servicio de televisión por cable. En la zona donde viven hay dos compañías que proveen este servicio, CableMex y CableMax. En CableMex cobran una inscripción de $400 y la renta mensual por los canales básicos es de $300, en CableMax no cobran inscripción, y su renta mensual es de $400 por los canales básicos. Analicen la gráfica mostrada y contesten las preguntas.



- ¿En qué compañía les conviene más contratar el servicio por un año? CableMex
- ¿Cómo determinaron esto? La suma de lo del costo al año más la inscripción.
- ¿En qué altera la gráfica que en CableMex cobren inscripción? El costo al mes es menos.
- ¿Qué indica el punto donde las rectas se intersecan? Mismo mes mismo costo.
- ¿Cuál es la razón de cambio mensual para CableMax? 400
- ¿Qué representa esto en relación con la inclinación de la recta? Mientras más grande sea la razón mayor es la inclinación de la pendiente de la recta.
- ¿Ocurre una situación similar para CableMex? No

  Justifiquen su respuesta. Su razón de cambio es menor y la pendiente es directamente proporcional.

206

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

- ¿Qué expresión algebraica representa la línea azul? $y = 300x + 400$

  ¿Y la verde? $y = 400x$
- La pendiente de la recta de CableMax es: 300

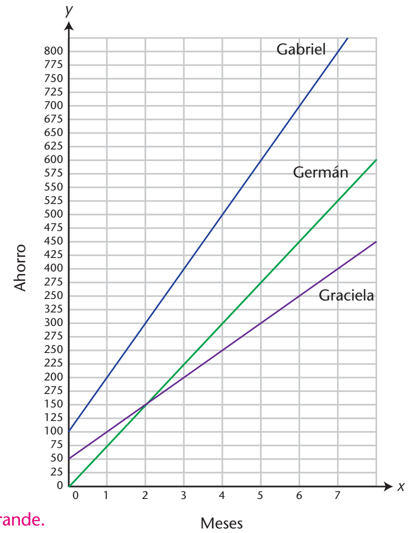
  y la de CableMex es: 400

2. Comparen sus respuestas con las de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren en su cuaderno una explicación breve acerca de la relación entre la razón de cambio y la pendiente de una recta.

PRACTÍCALO

Actividad 6.3

1. Gabriel, Germán y Graciela son hijos del señor Gerardo, para enseñarlos a ahorrar, su papá les dijo que guardaran parte del dinero que reciben por lo menos durante 7 semanas. Para comparar el ahorro de cada uno les mostró la siguiente tabla.



- ¿Con cuánto dinero inició el ahorro Gabriel? \$100
- ¿Cuánto ahorra Gabriel por semana? \$50

  ¿Cómo determinaron este dato?

  En 1 mes hizo un ahorro de 200, se dividió entre 4.
- ¿Con qué cantidad inició su ahorro Germán? \$0
- ¿Con cuánto dinero inició Graciela? \$50
- ¿Qué indica el punto donde se intersecan las rectas verde y rosa? Que en ese punto tienen la misma cantidad de dinero y en el mismo tiempo.
- Si se calcula la razón de cambio entre las semanas 2 y 1 para Graciela y Germán, ¿qué diferencia se puede notar? La razón de cambio de Germán es más grande.
- Si comparan las semanas 2 y 3, ¿qué se observa? Que mantienen el mismo estándar.
- Entonces, ¿qué ocurrió con la razón de cambio de cada uno? Se mantuvieron proporcionales al mes.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el ahorro de Gabriel?
- ¿Cuál es la expresión algebraica para el ahorro de Germán? (75)nmes
- ¿Cuál es la expresión para la recta de Graciela? 50 + (50)nmes
- Las pendientes de cada recta son: Gabriel 100 Germán 75

  Graciela 50
- El señor Gerardo les preguntó en la semana 5 cuánto habían ahorrado. Gabriel contestó 600

  Germán dijo 375 Graciela respondió 300

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda de su profesor obtengan conclusiones.

Qué observar

Déles tiempo y libertad a los alumnos para que resuelvan. Los planteamientos tienen la intención de involucrar al alumno con el razonamiento deductivo. Asegúrese de que lean y entiendan cada una de las preguntas propuestas

Cómo enriquecer la actividad

Pida a las parejas que vea con mayor seguridad que expongan frente al grupo, y que los demás contrasten sus procedimientos y resultados. Si lo considera prudente, puede plantear situaciones similares variando el nivel de dificultad, pero sin perder la concentración en los planteamientos y en el análisis de la gráfica.

Transversalidad

Español

Es necesario que para comprender una función algebraica se pueda entender la información que de ella se tiene, por eso es indispensable conocer, y sobre todo comprender la lectura de axiomas y teoremas.

Bitácora pedagógica

Qué observar

El alumno debe deducir con cierta facilidad cómo se resuelve esta situación y completar las tablas de manera correcta. Permita que por sí mismo resuelva las situaciones que se le presenten y busque comprobar que está realizando su trabajo correctamente.

Cómo enriquecer la actividad

En esta parte la motivación es muy importante para lograr desarrollar y consolidar los procesos deductivos. Recuerde que la intención es plantear la solución o bien encontrarla por medio del razonamiento, en cualquier caso decida si desea homologar el ejercicio y, por lo tanto, los resultados obtenidos.

Reflexión

Sobre el servicio

Es el valor que consiste en hacer algo bueno por los demás, en ayudarlos a solucionar un problema o a conseguir lo que necesitan. Es realizar alguna acción para el bienestar de quienes nos rodean. El servicio está ligado a valores como colaboración, participación, solidaridad, amistad, respeto y gratitud.

Matemáticas 3. Por competencias

Para leer más

De manera gráfica se puede comparar y analizar fácilmente la relación entre dos conjuntos de números o cantidades, y si se trata de una recta, la razón de cambio siempre es constante, es decir, no va a variar entre cada intervalo.

Al analizar la gráfica lineal obtenida a partir de una relación directamente proporcional es posible determinar la expresión algebraica que la representa, y de ésta misma obtener la medida de la pendiente o inclinación de la recta.

Para tener en cuenta

Se le llama *razón de cambio* al cociente que se obtiene al dividir el incremento que sufre una cantidad entre la cantidad inmediata anterior. La relación entre cantidades muestra un incremento de una en relación a la otra de una manera proporcional, por lo mismo, se pueden comparar y con ello establecer la razón de cambio entre cada uno de sus intervalos.

LO QUE APRENDÍ

Durante la clase de matemáticas el profesor dijo a sus alumnos que para comprender la relación entre la pendiente, la razón de cambio y la expresión algebraica que representa la recta deberían comparar algunas expresiones.Observa las expresiones dadas por el profesor y contesta las preguntas.

1. Una recta tiene la forma $y = mx + b$, la pendiente está representada por la letra m y la ordenada al origen, es decir, el punto donde la recta corta al eje de las y, está representada por la letra b.

   a) Analicen las siguientes expresiones y luego construyan una tabla para cada una con al menos 3 valores, y luego las que cambian en la pendiente m, trácenlas sobre un mismo plano, después realicen esta misma acción para las rectas que cambian en la ordenada al origen.

Cambiando m	$20x$	$20x + 10$	$20x + 20$
Cambiando b	$10x + 5$	$15x + 5$	$20x + 5$

La respuesta dependerá del alumno, ya que se espera que el alumno plantee los valores de las tablas.

$20x$	
x	y
1	20
2	40
3	60

$20x + 10$	
x	y
1	30
2	50
3	70

$20x + 20$	
x	y
1	40
2	60
3	80

$10x + 5$	
x	y
1	15
2	25
3	35

$15x + 5$	
x	y
1	20
2	35
3	50

$20x + 5$	
x	y
1	25
2	45
3	65

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

b) Construye en tu cuaderno la gráfica para las rectas donde se modificó el valor de la pendiente *m*.

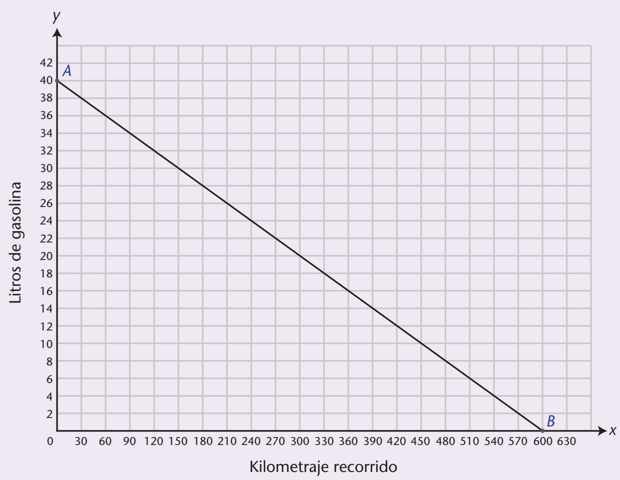
- ¿Qué estrategia utilizaste para determinar el tamaño y la graduación de los planos cartesianos? La respuesta dependerá del alumno. Se espera que el alumno construya la gráfica correspondiente.
- ¿En qué se modifica la razón de cambio para las rectas donde se varía el parámetro *m* (pendiente)? La respuesta dependerá del alumno. Se espera que el alumno observe la variación de la pendiente.
- ¿Ocurre lo mismo para la las gráficas donde se modifica *b*, es decir, la ordenada al origen?
- ¿Por qué ocurre esto? La respuesta dependerá del alumno. Se espera que el alumno compare las diferencias de las rectas en la gráfica hecha anteriormente.
- Si se selecciona un intervalo sobre el eje *x* y se calcula la razón de cambio en ese intervalo para las rectas de ambas gráficas, ¿qué diferencia se puede observar? La respuesta dependerá del alumno. Se espera que el alumno calcule la razón de cambio.
- Entonces, ¿cuál de los dos parámetros está directamente relacionado con la pendiente de la recta? La respuesta dependerá del alumno. Se espera que el alumno comprenda la relación de la pendiente con los términos.

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren en su cuaderno una definición formal para los parámetros *m* y *b*, para las rectas de la forma $y = mx + b$, y expliquen cuál es su función.

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos, analicen la situación planteada y respondan las preguntas.

   En la gráfica mostrada se encuentra representado el consumo de gasolina de un vehículo y los kilómetros recorridos.



Qué observar

Observe que los alumnos distingan que se trata de una proporcionalidad inversa. Es importante vrificar que oficialicen los datos de la tabla para contestar las primeras preguntas; de ser necesario, oriente con preguntas reflexivas las últimas respuestas.

Recursos y materiales

En la página de *Telesecundaria* encontrará un interactivo que podrá trabajar con sus alumnos, permita que la visiten y que realicen las actividades que se presentan.

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b01_t06_s01_descartes/index.html

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

USA LAS TIC

Visita la página http://www.educaplus.org/play-40-Ecuación-de-la-recta:-pendiente-y-punto-de-corte.html (Consultada el día 9 de abril de 2013, a las 9:26 horas), en ella encontrarás una sencilla aplicación que te permitirá mover libremente una recta sobre el plano cartesiano y podrás analizar con detalle la inclinación de la recta, así como la relación con los valores de los ejes. También podrás ver el cambio en el ángulo de inclinación de la recta con el eje *x*. Después de tu visita elabora un comentario que responda: ¿cuál es la utilidad de contar con este tipo de recursos?, y bajo la coordinación del profesor, elaboren una lluvia de ideas para encontrar la mejor definición para la pendiente de la recta y la relación que tiene con la razón de cambio entre los intervalos de una gráfica.

- ¿Qué capacidad total tiene el tanque de gasolina? 40 litros
- ¿Cuántos kilómetros puede recorrer sin recargar combustible? 600
- ¿Cuántos kilómetros recorre el vehículo por litro? 15
- Entonces, después de haber gastado los primeros 3 litros de combustible, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido? 45 kilómetros
- Si consideramos el consumo por litro de gasolina, ¿cuál es la razón de cambio del consumo por litro? $\frac{1}{5}$
- ¿Cómo determinaron esta cantidad? Calculando cuántos kilómetros puede recorrer por cada litro de gasolina.
- La relación entre los litros de gasolina consumidos y el kilometraje recorrido, ¿es directa o inversa? Inversamente proporcional
- ¿Esto qué significa? Que mientras avanza el carro baja su gasolina.
- Gráficamente, ¿cuál es la diferencia entre esta recta y las que trabajaron anteriormente en este contenido? Está en sentido contrario.
- ¿En qué afecta esto a la inclinación de la recta? En que ahora representa una relación inversamente proporcional.
- Entonces, ¿qué signo debe tener la expresión algebraica que modela esta situación? Negativo
- ¿Cómo definen con sus propias palabras el efecto que tiene el signo negativo en la gráfica de una expresión algebraica? Cambia el sentido de la recta aunque su inclinación sigue siendo la misma.
- ¿Afecta esto la inclinación o pendiente de la recta? Justifiquen su respuesta. No la afecta, porque la inclinación depende del coeficiente y no del signo.

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una explicación que aclare: la relación que hay entre el signo negativo de una expresión algebraica lineal, la pendiente que la representa y la razón de cambio de la gráfica.

Cómo enriquecer la actividad

Estas actividades tienen un nivel de dificultad más elevado que los anteriores, es conveniente que analice las respuestas frente al grupo, donde algunos alumnos puedan justificar sus resultados y elaboren una conclusión acerca del signo negativo en la representación gráfica de una expresión lineal.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Análisis y representación de datos
Contenido 7	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la “desviación media” con el “rango” como medidas de la dispersión.

ACUÉRDATE DE...

1. Diego y Andrea son hermanos, para llevar un mejor control de sus calificaciones en Matemáticas, decidieron registrar los resultados de los examenes de control que les aplica su profesor, dos por cada bimestre. Al final del cuarto bimestre ya tienen 8 resultados cada uno.

   a) Observen los resultados en la tabla y contesten las preguntas.

Número de examen	1	2	3	4	5	6	7	8
Andrea	6.5	7.5	10	7	9	5	10	5
Diego	8	7.5	7	8	8	7	7.5	7

- Considerando estos resultados, ¿creen que es posible hacer un pronóstico de la calificación del siguiente examen para ambos hermanos? Sí Expliquen su respuesta. Con la desviación de media.
- ¿Cuál de los dos hermanos consideran que tiene un mejor desempeño académico? Son iguales
  Justifiquen su respuesta. Con la operación de media, sumando las calificaciones y dividiéndolo entre el número de calificaciones.
- ¿Para cuál de los dos hermanos consideran que es más sencillo hacer un pronóstico de su próxima calificación? Diego Justifiquen su respuesta. No tiene mucha variante entre sus calificaciones.
- Analizando los datos, ¿de qué manera se puede calcular la media aritmética para ambos?
  $\frac{c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6 + 7c + 8}{nc}$ donde n = número de calificaciones y c = calificaciones
- ¿Estos datos permiten realizar el pronóstico de la siguiente calificación? Sí
  ¿Porqué?
  Con la aplicación de la media aritmética, el siguiente paso es sacar la desviación de media.
- A partir de cuál de los grupos de calificaciones consideran que se presenta mayor diferencia, la de Andrea o la de Diego, con respecto a su media aritmética. Andrea
- Elaboren una hipótesis acerca de lo que consideren que representa una mayor o menor diferencia con respecto a la media, es decir, al comparar cada uno de los datos con el promedio de todos ellos.

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros y con la asesoría del profesor analicen algunas de las hipótesis planteadas por los equipos e interpreten cada una para comprender la idea que cada una aporta, registren sus observaciones y conclusiones en su cuaderno.

Qué observar

En esta actividad los alumnos utilizarán conceptos nuevos, tal vez un poco complicados, como entender qué es la dispersión de datos. Dé el tiempo suficiente para que las parejas analicen la situación dada y deduzcan lo que se busca resolver.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que esta actividad la suspenda cuantas veces se requiera, con la intención de resaltar las características relacionadas con la dispersión de datos. Oriente a los alumnos para que la actividad se realice de manera fluida y cómoda, recuerde que la intención es rescatar los conocimientos previos y preparar al alumno para desarrollar el resto del contenido.

Bitácora pedagógica

Recursos y materiales

En la página de *Eumed* encontrará información que le permitirá trabajar este tema con los alumnos.

http://www.eumed.net/libros-gratis/2007a/239/5a.htm

Qué observar

En esta actividad se observa más claramente la dispersión de datos; vigile que el alumno realice las operaciones de manera apropiada y que responde con seguridad y confianza. De ser necesario, trate de resolver sus dudas por medio de preguntas, para no darle directamente la respuesta.

Cómo enriquecer la actividad

Esta situación de por sí ya es sencilla, así que puede utilizar las calificaciones que obtuvo el alumno en el ciclo escolar pasado para analizar qué tanto estuvieron "dispersos" estos datos. El manejar cantidades que el alumno conozca facilitará su proceso de razonamiento y, por tanto, entender el concepto, así como sacar conclusiones. Continúe con este criterio para la siguiente actividad.

Curiosidades, acertijos y más

En el siglo XIX, la estadística entra en un nuevo periodo de desarrollo, sobre todo para estudiar fenómenos de ciencias, tanto naturales como sociales. Galton (1822-1911) y Pearson (1857-1936) son considerados como los personajes que cambiaron la estadística deductiva a la inductiva.

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 7.1

1. Lee la situación planteada, analízala según tu criterio y responde.

a) En la tabla registra, de menor a mayor, las calificaciones de Andrea y Diego.

Andrea	5	5	6.5	7	7.5	9	10	10
Diego	7	7	7	7.5	7.5	8	8	

- ¿Cuál es la media aritmética para Andrea? 7.5
- Escribe la operación que permite conocer este resultado. $\frac{5 + 5 + 6.5 + 7 + 7.5 + 9 + 10 + 10}{8}$
- ¿Cuál es la media aritmética para Diego? 7.5
- Escribe la operación que permite conocer este resultado. $\frac{7 + 7 + 7 + 7.5 + 7.5 + 8 + 8 + 8}{8}$

b) Grafica en tu cuaderno las calificaciones de la tabla de la sección "Acuérdate de…", tal como aparecen en la tabla.

c) Ubica sobre el eje de las ordenadas el punto correspondiente a la media aritmética y traza una línea paralela al eje *x*.

- ¿En cuál de las gráficas observas que los datos están más dispersos con respecto a la media? Andrea ¿Por qué ocurre esto? Por qué son más variadas sus calificaciones.
- Al ver las gráficas, ¿cómo puedes determinar cuál de los dos hermanos logra tener menos variación en sus calificaciones. Diego
- Entonces, ¿qué consideras que significa que las calificaciones son más dispersas entre sí?
- ¿Analizar estas gráficas y conocer la media aritmética es suficiente para poder hacer un pronóstico de su siguiente evaluación? Sí Justifica tu respuesta. En la gráfica se da a notar la variación de cada calificación y sacará así un pronóstico de la siguiente calificación.

d) Lee nuevamente la hipótesis que hiciste en la sección anterior y analiza si cambió tu definición al ver estas representaciones gráficas. Registra una conclusión acerca de esto.
Con las gráficas se ve más clara la diferencia de valores, cambia la perspectiva al ver la gráfica.

2. Compara tus resultados con los de tus compañeros y con la ayuda del profesor respondan, ¿qué estrategia pueden usar o de qué manera es posible medir esta dispersión de datos?

PRACTÍCALO

Actividad 7.2

1. Con base en las actividades anteriores, respondan las preguntas.

- ¿Cuál es la calificación más alta de Andrea? 10 ¿Cuál es su calificación más baja? 5
- ¿Cuál es la diferencia entre estas calificaciones? 5
- ¿Cuál es la calificación más alta de Diego? 8 ¿Cuál es su calificación más baja?
- ¿Cuál es la diferencia entre estas calificaciones? 1

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

- ¿Cuál de los dos tiene un menor **rango**, o diferencia entre el dato mayor y el menor? 8 – 7
- ¿Consideran que el rango da información suficiente para conocer si los datos presentan alguna regularidad qué tan dispersos están entre ellos con respecto a su promedio? Sí

  Justifiquen su respuesta. Es un rango amplio para poder la variación.

Glosario

Rango. Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor en una serie de datos.

- ¿Cuál consideran que es la utilidad de conocer el rango de una serie de datos al momento de valorar si éstos son más regulares o dispersos? Para saber la variación que existe entre ellas y ver su desplazamiento.

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y con la asesoría del profesor elaboren una conclusión que explique, de forma breve, cuál es la función del rango y definan su propósito principal.

PRACTÍCALO

Actividad 7.3

1. Al llegar a casa, Diego y Andrea fueron a hablar con su papá, él quería darse una idea de la posible calificación que obtendrían sus hijos en el siguiente examen y pensó que si analizaba los resultados que ya tenían podría hacer una predicción. Se le ocurrió que si encontraba la diferencia entre cada calificación y su promedio se podría dar una mejor idea.

Número de examen	1	2	3	4	5	6	7	8
Andrea	6.5	7.5	10	7	9	5	10	5
Diego	8	7.5	7	8	8	7	7.5	7

a) Completen la tabla que diseñó el papá de Andrea y Diego, y contesten las preguntas.

Andrea		Diego	
Calificación	Desviación (Calificación-promedio)	Calificación	Desviación (Calificación-promedio)
6.5	6.5 – 7.5 = –1	8	8 – 7.5 = 0.5
7.5	7.5 – 7.5 – 0	7.5	7.5 – 7. – 0
10	10 – 7.5 + 2.5	7	7 – 7.5 – .5
7	7 – 7.5 – .5	8	8 – 7.5 + .5
9	9 – 7.5 + 1.5	8	8-7.5 + .5
5	5 – 7.5 – 2.5	7	7 – 7.5 – .5
10	10 – 7.5 + 2.5	7.5	7.5 – 7.5 – 0
5	5 – 7.5 – 2.5	7	7 – 7.5 – .5
Total	0	Total	

- ¿Cuánto suman las desviaciones para cada caso? 0 y – 1
- ¿Por qué consideran que ocurre? Es que al manejar la desviación sin módulo nos da un resultado real y con el módulo obtenemos el valor absoluto.
- Si solamente se suman las cantidades positivas de Andrea, ¿cuál es el total? 6.5

Qué observar

La anticipación de resultados es un método que se utiliza para crear pronósticos con base en el análisis. Observe que los alumnos comprendan este proceso y que resuelven la actividad de manera adecuada. Deles el tiempo necesario para ello y vigile que las parejas trabajen con respeto y orden.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a algunas parejas que expliquen sus resultados y la manera como construyeron sus tablas. La interpretación que den será importante para que el resto del grupo contraste sus resultados, incluso pueda cuestionar a la pareja expositora y de esta manera aclarar sus dudas.

Bitácora pedagógica

Reflexión

“Es de a poco como se alcanza objetivos, metas y retos, es con sabiduría y consejo como se abre el camino al éxito y sobre todo, es con la mejor motivación con la que se debe llegar al triunfo, porque en ella habremos facilitado el camino para otros, deseando que también lleguen a la victoria.” Pida a sus alumnos que reflexionen en éstas palabras.

Qué observar

Continúe vigilando el desempeño de los alumnos, el desarrollo de sus operaciones y los procesos deductivos que realice.

Cómo enriquecer la actividad

De ser necesario, recuerde un poco el concepto de valor absoluto y aclare que éste se representa con barras paralelas verticales. Motive a los alumnos, por medio de preguntas, para que encuentren las diferencias con respecto a las actividades anteriores y sobre todo, a que deduzca cuál es la utilidad de realizar estos cálculos.

Recursos y materiales

En la página de *Vitutor* encontrará ejercicios interactivos de la desviación, que le serán de utilidad para enriquecer su clase.

http://www.vitutor.com/estadistica/descriptiva/a_14_e.html

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Qué resultado se obtiene si se suman sólo las cantidades de Andrea que tienen signo negativo? 5.5
- ¿Esta misma situación ocurre para Diego? No
- ¿Por qué se presenta esto? Por las sumas reales que existen.
- ¿Con estos resultados es posible hacer una predicción sobre la siguiente calificación? No
- Expliquen su respuesta. Por qué obtuvimos el número real y necesitamos el valor absoluto.
- Entonces, ¿de qué manera consideran que es posible aprovechar las cantidades que se obtienen al calcular la desviación de cada dato? Obteniendo el valor absoluto usando los módulos.

2. En equipos, analicen sus resultados y escriban una conclusión acerca de qué manera es posible aprovechar las desviaciones de cada dato para conocer la dispersión de la serie de datos.

PRACTÍCALO **Actividad 7.4**

1. El papá de Andrea y Diego, para resolver su duda, fue a hablar con el profesor de matemáticas, le comentó del análisis que hizo de las calificaciones de sus hijos y el profesor le sugirió que hiciera nuevamente este cálculo, pero ahora utilizando los valores absolutos de la desviación de cada dato.

a) Completen las tablas y respondan las preguntas.

Andrea	
Calificación	Desviación (Calificación-promedio)
6.5	$\|6.5 - 7.5\| = 1$
7.5	$\|7.5 - 7.5\| - 0$
10	$\|10 - 7.5\| - 2.5$
7	$\|7 - 7.5\| - .5$
9	$\|9 - 7.5\| - 1.5$
5	$\|5 - 7.5\| - 2.5$
10	$\|10 - 7.5\| - 2.5$
5	$\|5 - 7.5\| - 2.5$
Total	13

Diego	
Calificación	Desviación (Calificación-promedio)
8	$\|8 - 7.5\| = 0.5$
7.5	$\|7.5 - 7.5\| - 0$
7	$\|7 - 7.5\| - .5$
8	$\|8 - 7.5\| - .5$
8	$\|8 - 7.5\| - .5$
7	$\|7 - 7.5\| - .5$
7.5	$\|7.5 - 7.5\| - 0$
7	$\|7 - 7.5\| - .5$
Total	

- ¿Los resultados fueron iguales o distintos a las tablas hechas en la actividad anterior? Diferentes
  ¿Por qué ocurrió esto? Por qué aplicamos el valor absoluto.
- ¿Qué representan estos nuevos resultados? La diferencia de media.
- ¿Cuánto suman las desviaciones para Andrea? 13
- En el caso de Diego, ¿cuánto suman las desviaciones? 3
- Entonces, ¿cuál es el promedio de las desviaciones para Andrea? 1.625

214

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

- ¿Cuál es el promedio de las desviaciones para Diego? 0.375

b) Reflexionen sobre el significado de las respuestas anteriores y respondan.

- ¿Qué significa que la desviación media tenga una diferencia menor en comparación con la media aritmética? Que la dispersión de datos fue menor.
- ¿Por qué razón la desviación media presenta una diferencia mayor en comparación con la decia? Por qué la media es el promedio, desviación una medida de dispersión dentro de un rango.

2. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros y con la ayuda del profesor elaboren una explicación breve que indique por qué la desviación media es una medida que proporciona una información más adecuada que el rango para conocer la dispersión de una serie de datos.

PRACTÍCALO **Actividad 7.5**

1. En una empresa van a contratar nuevo personal, para ello dedicaron una hora en la entrevista de cada aspirante, sin embargo para agilizar las entrevistas quieren determinar el tiempo ideal para cada una y optimizar los tiempos, en el primer día entrevistaron 10 personas, sus tiempos en minutos fueron los siguientes:

64, 18, 40, 23, 37, 30, 28, 43, 26, 20

- ¿Cuál es la media aritmética? 32.9
- Escriban la operación que llevaron a cabo. $\frac{64+18+40+23+37+30+28+43+26+20}{10}$

a) Con base en estos datos, completen la tabla.

Número de entrevista	Tiempo en minutos	Tiempo-media aritmética	Valor absoluto de la diferencia
1	64	64 − 32.9	31.1
2	18	18 − 32.9	14.9
3	40	40 − 32.9	7.1
4	23	23 − 32.9	9.9
5	37	37 − 32.9	4.1
6	30	30 − 32.9	2.9
7	28	28 − 32.9	4.9
8	43	43 − 32.9	10.1
9	26	26 − 32.9	6.9
10	20	20 − 32.9	12.9
		Total	

- ¿Cuál es la desviación media para esta serie de datos? 10.48
- Escriban la operación que realizaron. $\frac{31.1+14.9+7.1+9.9+4.1+2.9+4.9+10.1+6.9+12.9}{10}$
- Si lo que se quiere es definir un tiempo adecuado para las entrevistas, ¿cómo se puede utilizar el dato que da la desviación media? El valor absoluto de variación de tiempo de cada entrevista.
- Por lo tanto, ¿cuál es el tiempo de duración más adecuado para que programen las nuevas entrevistas de trabajo? 10.48

215

Qué observar

Esta sección ayudará a los alumnos a tener más libertad para resolverla. Observe y valore la seguridad en el análisis que realicen, así como en los planteamientos que hagan. Fomente una actitud donde ellos tengan que resolver sus propias dudas e investigar lo que sea necesario.

Cómo enriquecer la actividad

Puede ayudar a sus alumnos explicando brevemente algunos casos similares y resaltando la utilidad de conocer este proceso en la vida cotidiana, sobre todo para las empresas con necesidad de contratar nuevo personal.

Transversalidad

Ciencias 2, Física

Las ecuaciones lineales se pueden aplicar en diferentes temas de física, sobre todo cuando se tiene una constante; por ejemplo, para calcular la velocidad de un ojeto en diferente tiempo cuando se ha dejado caer libremente, está representado por la ecuación $h = \frac{1}{2}gt$, donde tanto $\frac{1}{2}$ como g (9.8 m/s^2) son constantes.

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Cómo determinaron el tiempo de duración de cada entrevista? Con la deviación absoluta.

- Entonces, ¿cuál es la manera de aplicar la desviación media de una serie de datos al momento de tomar decisiones sobre los resultados? Se ocupa para sacar un estándar de una serie de datos.

2. Contrasten sus resultados con algunos de sus compañeros y con la asesoría del profesor elaboren una definición formal del significado práctico del uso de la desviación media en relación al número mayor y menor con respecto a la media.

Qué observar

La situación planteada contiene muchos datos, observe que el alumno los maneje adecuadamente y que comprende el propósito de la misma. Dé el tiempo suficiente y valore su desempeño, poniendo especial atención en la seguridad y confianza que demuestre.

Para leer más

Para calcular la desviación media de una cierta cantidad de datos n x_1, x_2, x_3, x_4 … x_n, cuya desviación media de cada uno de los datos es m se utiliza la fórmula:

$$DM = \frac{(|x_1 - x| + |x_2 - x| + |x_3 - x| + |x_4 - x| + |x_n - x|)}{n}$$

La desviación media, la podemos definir como la media aritmética de todos los valores absolutos obtenidos de las desviaciones de cada dato respecto a la media.

LO QUE APRENDÍ

1. En una empresa textil están pensando en renovar algunas máquinas que por el tiempo de uso, su reparación es muy tardada, lo que provoca pérdidas en la producción. Para decidir cuáles máquinas van a reemplazar, el supervisor tomó los tiempos que cada máquina se detenía por causas de reparación.

Máquina 1	45	74	76	48	59
Máquina 2	82	62	72	78	55
Máquina 3	26	41	38	35	44
Máquina 4	33	45	53	68	77
Máquina 5	51	60	76	54	64

Cómo enriquecer la actividad

Esta situación puede ser poco familiar para el alumno, permita que la reflexione con calma y, de ser posible, dé una pequeña introducción para que se entienda el contexto; luego permita que el alumno resuelva la actividad con sus propios medios y oriéntelo si es necesario.

a) Registra en la tabla la media aritmética del tiempo de reparación de cada máquina.

Máquina	1	2	3	4	5
Media	60.4	69.8	36.8	55.2	61

b) Construye en tu cuaderno las tablas para encontrar el valor de la desviación media de cada máquina y regístralas en la tabla.

Máquina	1	2	3	4	5
Desviación media	11.68	9.04	5.04	13.84	7.2

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

- Si en primer lugar se van a cambiar sólo 3 máquinas, ¿cuáles son las que se tienen que cambiar primero? 3,5,2
- De las máquinas restantes, ¿cuál es la siguiente para ser remplazada? 1

2. Contrasta tus tablas y tus respuestas con las de tus compañeros y con la ayuda de tu profesor concluye cuál es la manera más adecuada de resolver una situación que maneja una gran cantidad de datos, o si hay alguna otra manera de resolverla.

Desarrolla tus habilidades

1. Lee la situación indicada, diseña una estrategia para resolverla y contesta las preguntas.

a) Lleva a cabo el registro de tus calificaciones de los tres primeros bimestres en todas las asignaturas y elabora en tu cuaderno una tabla para presentarlas de manera ordenada, por ejemplo.

Asignatura	Calificaciones		
	Bimestre 1	Bimestre 2	Bimestre 3
Matemáticas	La respuesta dependerá del alumno. Se espera que el alumno llene la tabla con sus propios datos.		
Ciencias 3, Química			

- ¿Cuál es el promedio de cada bimestre? 1° ______ 2° ______ 3° La respuesta dependerá del alumno. El alumno deberá calcular el promedio de cada bimestre.

b) Calcula la desviación media de cada bimestre y elabora en tu cuaderno una tabla donde registres la desviación de cada dato, por ejemplo:

Asignatura	Desviación		
	Bimestre 1	Bimestre 2	Bimestre 3
Matemáticas	La respuesta dependerá del alumno. El alumno efectuará los cálculos con base en los datos que proporcionó en la tabla anterior.		
Ciencias 3, Química			

- ¿En cuál de los tres bimestres obtuviste mejores calificaciones? La respuesta dependerá del alumno. Se espera que el alumno identifique su promedio mayor.
- ¿En cuál de los bimestres observaste una mayor dispersión entre tus evaluaciones? La respuesta dependerá del alumno. Se espera que el alumno identifique si muestra irregularidad en sus evaluaciones.
- ¿Qué conclusión puedes obtener a partir de estos datos? La respuesta dependerá del alumno. Se espera que el alumno realice una conclusión con base en sus resultados.
- ¿Si tuvieras que tomar alguna decisión con base en este estudio estadístico para valorar tu desempeño, qué harías? Valorar los diferentes resultados.

2. Compara tus resultados con los de tus compañeros y con la asesoría de tu profesor determina, ¿cuál es la aplicación y utilidad en la vida cotidiana que tiene el poder calcular la desviación media de una serie de datos?

USA LAS TIC

Visita la página http://es.ncalculators.com/statistics/standard-deviation-calculadora.htm (Consultada el día 9 de abril de 2013, a las 10:37 horas), en ella encontrarás una calculadora estadística que te permitirá calcular la desviación estándar de los datos agrupados que ingreses, además da otras cantidades que en estudios posteriores te serán de utilidad, después de tu visita comenta con tu profesor, ¿cuál es la utilidad práctica que tiene el contar con recursos como este y cómo puedes aplicarlos en la vida cotidiana?

Qué observar

Es aconsejable que el alumno resuelva esta actividad en su cuaderno, y de preferencia de manera individual. Vigile que la desarrolle completa y que es capaz de responderla con seguridad y fluidez. Es conveniente que al final la analice frente al grupo y discutan su aplicación en la vida cotidiana.

Cómo enriquecer la actividad

Si lo considera necesario, puede ponerla como trabajo de casa y por parejas, también solicitarla en el cuaderno o bien en hojas blancas como trabajo extra; en cualquier caso, debe demostrar sus conocimientos en cuanto a la desviación media y con ello poder realizar inferencias.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Procure que cuando resuelvan la evaluación tengan las mejores condiciones. Prepare lo necesario para que nada incomode la prueba y oriente a los alumnos en cómo está diseñada, para tratar de disminuir lo más posible las dudas durante la aplicación.

Cómo enriquecer la actividad

Motive a los alumnos para que resuelvan la evaluación de forma honesta. Resalte su importancia y la utilidad que ésta tiene para mejorar su nivel actual de conocimientos. Procure que tomen la evaluación como algo habitual, es decir, como parte del proceso de aprendizaje de las Matemáticas.

Matemáticas 3. Por competencias

Evaluación tipo PISA

1. En un laboratorio, al hacer observaciones en el crecimiento de algunos microorganismos, se dieron cuenta de que al elaborar el registro diario se podía representar por la siguiente sucesión: 9, 18, 31, 48, 69, 94 … *n*

   ¿Cuál será la población de este microorganismo después de 50 días?

   a) 4 953 b) 5 154 c) 5 359 d) 5 568

   Explica:

   • ¿Cuál es el procedimiento para encontrar la expresión algebraica que representa el crecimiento del microorganismo? El método de diferencia.

   • ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el crecimiento? $y = 2n^2 + 3n + 4$

2. Analiza las siguientes afirmaciones y determina cuál de ellas expresa correctamente la definición de un sólido de revolución. Selecciona "Sí"o "No", según corresponda.

a) Todos los sólidos de revolución se forman sólo cuando se gira un triángulo, un rectángulo o una circunferencia, por cualquiera de sus lados.	Sí	No
b) Un sólido de revolución se forma cuando una figura plana se gira sobre un eje, las principales son el triángulo, el rectángulo y la circunferencia que forman, respectivamente, el cono, el cilindro y la esfera.	Sí	No
c) Un sólido de revolución es una forma de crear objetos, como botellas, jarras, cazuelas, vasos, etcétera, por eso es muy útil en la vida cotidiana.	Sí	No
d) Un sólido de revolución es una figura que tiene volumen y se puede descomponer en una superficie plana y que tiene al menos una cara plana y una cara curva.	Sí	No

3. Observa la imagen y responde las siguientes preguntas.

   a) ¿Cuál es la pendiente o inclinación del brazo de la grúa?

   a) 3 b) 1
   c) 2 d) 4

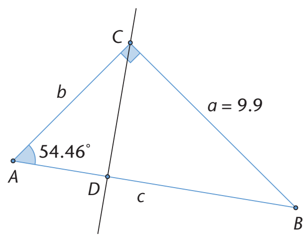
   b) ¿Cuál es la función trigonométrica que permite calcular el ángulo *A*?

   $x = \tan^{-1} \frac{co}{ca}$

   c) ¿Cuál es la amplitud?

   a) 71.5° b) 69.4°
   c) 78.2° d) 80.1°

4. Observa la siguiente figura y responde: ¿cuáles son los valores del $\overline{CD}$, el lado *b* y el lado *c*, respectivamente?



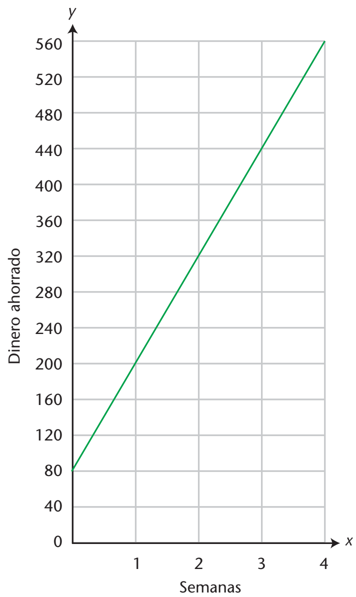
a) $\overline{CD} = 4.35$	$b = 8.04$	$c = 11.21$
b) $\overline{CD} = 6.14$	$b = 9.08$	$c = 13.27$
c) $\overline{CD} = 5.75$	$b = 7.07$	$c = 12.17$
d) $\overline{CD} = 7.25$	$b = 6.03$	$c = 14.25$

Bitácora pedagógica

BLOQUE 4

Evaluación tipo PISA

5. Julián está ahorrando, para ello junta todas las monedas que le sobran de la semana y las guarda. La gráfica muestra el ahorro durante todo el mes.



- ¿Con cuánto dinero inició su ahorro? 80
- ¿Cuánto dinero ahorró a partir de la primera semana?

  a) $100   b) $80   c) $150   d) $120

- ¿Cuál fue la cantidad total de dinero que Julián logró ahorrar al final del mes? 560

6. Ana y Osvaldo compran tarjetas de deportistas y las intercambian para ganar puntos con los que pueden obtener un álbum de deportes. Ana ha conseguido 4, 7, 8, 14 y 17 puntos en sus intercambios y Osvaldo ha conseguido 3, 4, 7, 9, y 12.¿Cuál de ellos presenta una menor dispersión entre los puntos que ha ganado?

a) Los puntos de Paris, porque su media es 7 y la media de la serie dos es 10.

b) Los puntos de Osvaldo, porque la desviación media es 4.4 y la desviación de la serie dos es 2.

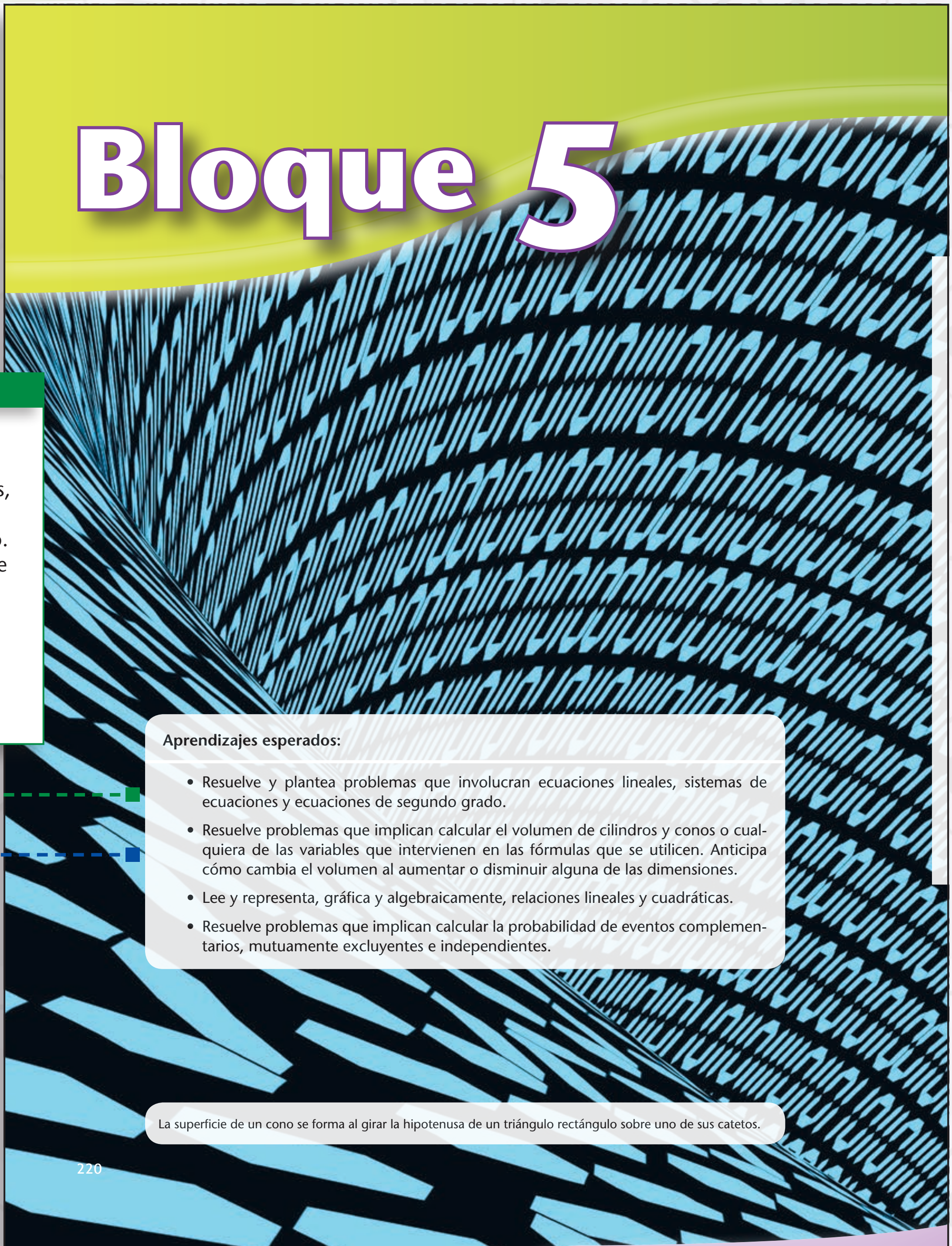
c) Los puntos de Paris, porque la desviación media es 2 y la desviación de la serie dos es 4.4

d) Los puntos de Paris, porque la media es 10 y la media de la serie dos es 7.

Cambiando números

Indique a los alumnos que para resolver la pregunta 6 los nombres que debe considerar son Paris y Osvaldo.

Bitácora pedagógica



Bloque 5

Aprendizajes esperados:

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

La superficie de un cono se forma al girar la hipotenusa de un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.

220

Qué observar

Verifique que los alumnos lean los aprendizajes esperados, comprenden su significado y propósito. Recuerde que es lo que se espera al concluir el bloque y, si el alumno tiene el antecedente, podrá valorar su aprovechamiento al finalizar.

Cómo enriquecer la actividad

Lea en clase los aprendizajes esperados, realice algunas preguntas de exploración. Puede solicitar que los alumnos opinen acerca del significado de cada aprendizaje y pida que hagan un pronóstico de los logros que les gustaría alcanzar.

Contexto histórico

1810
Inicia la Independencia de México.

1848
Carlos Marx escribe el *Manifiesto del Partido Comunista.*

1910
Inicia la Revolución Mexicana.

1914
Inicia la Primera Guerra Mundial.

1980
La sonda espacial *Voyager 2* fotografía al planeta Saturno.

Hechos matemáticos

1805
Pierre-Simon Laplace, desarrolla estudios sobre cálculo integral y ecuaciones diferenciales en ecuaciones parciales.

1880
Georg Ferdinand, publicó trabajos sobre la teoría de conjuntos. Demostró que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo tamaño.

1916
Albert Einstein desarrolló la teoría de la relatividad general, basando sus cálculos en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones (tres espaciales y una temporal).

1994
Andrew Wiles, demostró el último teorema de Fermat.

221

Qué observar

Verifique que los alumnos leyeron y observaron con atención la línea del tiempo. La intención es que relacionen los hechos matemáticos con el momento histórico en el que se desarrollaron.

Cómo enriquecer la actividad

Puede solicitar que investiguen algunos otros hechos, tanto históricos como matemáticos, y que resalten la importancia que tuvieron para el desarrollo de las ciencias, y el progreso de la humanidad.

Qué observar

Ponga especial atención en los esquemas que diseñan los equipos, es importante esta representación porque de ella depende el planteamiento de la expresión algebraica que modela la situación de manera correcta.

Cómo enriquecer la actividad

Puede mejorar esta actividad realizando algunas preguntas reflexivas en cuanto a diversos puntos, como puede ser ¿cómo determinaron la letra que representa la incógnita?, ¿cuál medida decidieron tomar como base, la mayor o la menor?, ¿usaron signos de agrupación?, etcétera.

Recursos y materiales

En la página de *Telesecundaria* encontrará un interactivo que le permitirá enriquecer su clase.

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b05_t01_s01_descartes/index.html

Matemáticas 3. Por competencias

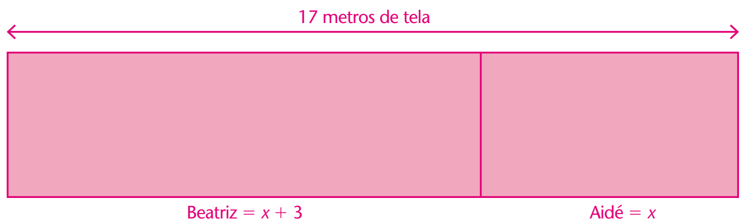
Eje temático	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Patrones y ecuaciones
Contenido 1	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

ACUÉRDATE DE...

1. Analicen la situación planteada y contesten las preguntas.

   a) Aidé y Beatriz compraron una tira de tela de 17 m de largo, al repartirla, Beatriz se quedó con una que mide 3 m más que la de Aidé. Planteen la ecuación que les permita conocer el número de metros de tela que tiene cada una.

   - Elaboren un esquema que represente esta situación.



   - ¿Cómo representaron la incógnita? La parte más pequeña se representa con x.
   - ¿Qué estrategia utilizaron para resolver el problema? Plantear una ecuación con los datos dados.
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? $x + (x + 3) = 17$
   - Escriban el algoritmo completo que utilizaron.

$x + (x + 3) = 17$

$x + x + 3 = 17$

$2x + 3 = 17$

$2x = 17 - 3$

$2x = 14$

$x = \frac{11}{20}$

$x = 7$

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

- ¿Cuál es el valor de la incógnita? $x = 7$
- La incógnita, ¿representa el segmento de tela más corto o el más largo?

  ¿Por qué ocurre esto? Puede representar cualquiera de los dos segmentos, pero es más sencillo que sea el corto porque esto hace posible trabajar con valores positivos.
- Entonces, ¿cuántos metros de tela tiene Beatriz? 10 m

  ¿Cuántos metros tiene Aidé? 7 m
- ¿Cómo pueden comprobar que sus resultados son correctos? Simplemente al sumar $10 + 7 = 17$ que es la cantidad de metros de tela que tenían y además la diferencia entre ambos es 3 como lo indica la situación dada.
- ¿Consideran que es posible encontrar la solución a este problema utilizando algún otro procedimiento? Sí Expliquen su respuesta. Se puede resolver también por tanteo.

2. Contrasten sus resultados y estrategias con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen cómo es posible verificar que un planteamiento es correcto y cumple con las condiciones indicadas en un problema.

PRACTÍCALO

Actividad 1.1

1. Para adornar un periódico mural, Juan cortó algunas figuras geométricas, entre ellas, un triángulo cuyos lados fueran 3 números consecutivos; cuando midió el perímetro de su triángulo el resultado fue 33 cm.
   a) Analicen la situación y propongan una estrategia que les permita conocer las medidas de los lados del triángulo que hizo Juan.
   - Elaboren en su cuaderno un esquema que represente esta situación.
   - ¿Qué estrategia utilizaron para representar las medidas de los lados del triángulo?

     Se toma el más pequeño. Al siguiente se le agrega uno y al otro dos unidades.
   - Escriban en su cuaderno el algoritmo con operaciones completas que realizaron para solucionar este problema.
   - ¿De qué manera definieron algebraicamente la(s) incógnita(s)?

     x el lado más pequeño, $(x + 1)$ el lado intermedio y $(x + 2)$ el último lado.
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación?

     $$x + (x + 1) + (x + 2) = 33$$
   - Entonces, ¿cuál es la medida de cada lado? 10, 11 y 12 cm respectivamente.
   - ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto y cumple con los términos que indica la situación original? Al sumar los 3 lados da 33 y a su vez son números consecutivos, es decir, que cumple con las condiciones de la situación dada.
2. Contrasten sus resultados con los de algunos de sus compañeros, y con la asesoría del profesor determinen cuál es el planteamiento más adecuado que permite resolver esta situación de una forma práctica.

Qué observar

Oriente a sus alumnos con preguntas o bien con ejemplos similares más sencillos, de modo que ellos mismos deduzcan que únicamente se requiere una letra para plantear la expresión que modela y soluciona esta situación.

Cómo enriquecer la actividad

Es importante que durante la clase haga énfasis en el uso del lenguaje algebraico y su respectiva representación, también que mencione el papel que desempeñan los signos de agrupación. Si lo considera necesario, tome una figura con medidas y luego pida que éstas mismas las expresen con una sola literal, esto les permitirá concentrarse en el planteamiento.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta situación puede ser solucionada por varios métodos, inclusive por ensayo y error; sin embargo, es muy importante que observe a los alumnos cómo están razonando y diseñando sus estrategias de solución. Nuevamente es recomendable que utilice preguntas o ejemplos para orientarlos, de manera que ellos deduzcan cuál es la forma más adecuada y que puedan concluir que no se trata simplemente de una proporción directa, esto es un error común que debe evitarse.

Cómo enriquecer la actividad

Pida que algunos equipos expliquen sus esquemas y el planteamiento que realizaron, sobre todo que justifiquen por qué consideran que es el procedimiento más adecuado, esto permitirá que la visión acerca de las alternativas de solución se amplíen.

Reflexión

"Hay que tratar de unir lentamente en la instrucción del alumno el saber y el poder. Las Matemáticas parecen ser, entre todas las ciencias, el único medio de satisfacer este fin."

Immanuel Kant.

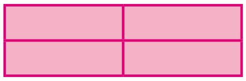
PRACTÍCALO — **Actividad 1.2**

1. Víctor y Jazmín se turnan para cuidar el jardín de su casa; cuando lo poda Víctor, se tarda 4 horas, y cuando lo hace Jazmín, se tarda 6; pero el próximo fin de semana podrán podarlo juntos.

   a) Diseñen una estrategia que les permita conocer el tiempo que tardarán en terminar el trabajo entre los dos.

   - Elaboren un esquema que represente esta situación.

Jardín

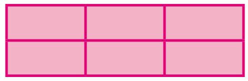


Víctor

$\frac{1}{4}$ por hora

Total 4 horas

Jardín



Jazmín

$\frac{1}{6}$ por hora

Total 6 horas

   - Expliquen qué estrategia emplearon para encontrar el tiempo. Se suma lo que cada uno puede hacer por hora, esto es $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$, que es lo que abarcarían trabajando juntos en una hora, si tomamos al jardín como unidad y dividimos entre $\frac{5}{12}$ da 2.4, esto en horas es 2 horas 24 minutos.
   - ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación? No es necesaria una expresión algebraica.
   - ¿Cómo plantearon la incógnita en este problema? Se puede encontrar la fracción que representa lo que cada uno hace por hora, luego sumarla para dividirla y encontrar el número de horas necesarias.
   - Realicen el algoritmo que les permitió encontrar el resultado.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ Ahora, al dividir $1 \div \frac{5}{12} = 2\frac{2}{5}$ esto es $\frac{12}{5}$ que equivale al dividir a 2.4, esto convertido a horas da 2 horas con 24 minutos. Es decir, que en cada doceavo tardan 12 minutos y como en una hora hacen $\frac{5}{2}$ en dos horas tienen 10 doceavos, al faltar dos más necesitan otros 24 minutos.

   - Entonces, ¿cuánto tiempo tardan en podar su jardín si lo hacen juntos? 2 h 24 min
   - ¿De qué manera se puede comprobar este resultado? Se puede comprobar planteando una proporción inversa.
   - ¿Cómo representaron el resultado, con un decimal, con una fracción o con algún otro número? En unidades de tiempo. Justifiquen su respuesta. Porque la situación pide investigar el tiempo que tardarían en podar el jardín juntos.

2. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen cuál es la importancia de ubicar y definir adecuadamente la incógnita en una expresión algebraica que modela una situación.

Bitácora pedagógica

PRACTÍCALO

Actividad 1.3

1. El papá de Hugo y Alberto les dio dinero para que se compraran pantalones y playeras. Hugo compró 3 pantalones y 5 playeras, por lo que pagó $1 450; Alberto compró 2 pantalones y 7 playeras, y pagó $1 260.

   a) Diseñen una estrategia que les permita conocer el precio unitario de cada artículo.
   - En su cuaderno hagan un esquema que represente esta situación.
   - ¿Qué operación plantearon para modelar este problema? Un sistema de ecuaciones 2×2

     $3x + 5y = 1450$ $2x + 7y = 1260$
   - ¿Por qué consideran que es la opción más adecuada para encontrar el valor unitario de cada prenda?

     Porque permite establecer una relación entre los precios de cada prenda con base en los datos de las compras realizadas.
   - Escriban en su cuaderno el desarrollo de las operaciones que llevaron a cabo.
   - ¿Cuál es el costo de cada pantalón? $ 350.00
   - ¿Cuál es el costo de cada playera? $ 80.00
   - ¿Cómo se puede demostrar que estas cantidades son correctas?

     Sustituyendo en alguna de las ecuaciones y verificando la igualdad.
   - ¿Qué otros métodos permiten encontrar la solución a esta situación?

     Es posible resolver este problema por tanteo.

2. Contrasten sus resultados con los de otras parejas, y con la ayuda del profesor determinen: ¿cuál de los procedimientos que usaron consideran el más adecuado para resolver esta situación?, ¿cuántos métodos de solución hay?, ¿cuál es la mejor manera de comprobar los resultados?

PRACTÍCALO

Actividad 1.4

1. Tomando como base las conclusiones de la actividad anterior, planteen un problema para cada inciso donde sea posible aplicar como modelo de solución el sistema de ecuaciones dado.

   a) $5x - 3y = 15$

      $4x + 2y = 100$
   - Escriban en el recuadro el problema que puede modelarse con la ecuación anterior y sus operaciones.

     Se espera que el alumno plantee una situación donde relacione expresiones como quíntuplo, el triple, el cuádruplo, el doble, etc. y establezca una relación entre ambas cantidades.

Qué observar

Siempre es un poco más complejo plantear un sistema de ecuaciones que una sola ecuación, vigile que los alumnos son capaces de deducir que no es posible resolver el problema si únicamente se plantea una ecuación; también es importante que observe qué método seleccionan para solucionarlo.

Cómo enriquecer la actividad

Haga notar que estos sistemas tienen varios métodos de solución; si lo considera prudente, puede repasar o reafirmar algunos de los algoritmos, recuerde que estos procesos ya los estudiaron. Lo importante es que deduzcan que se usa un sistema de ecuaciones, pero sobre todo cómo lo plantean.

Transversalidad

Español

El saber leer bien no basta, lo importante cuando se hace una lectura es entenderla. En las Matemáticas ocurre lo mismo, saber entender una situación nos permite realizar un mejor planteamiento para su solución. Pida a los alumnos que repasen sobre las estrategias de comprensión de lectura.

Bitácora pedagógica

Qué observar

La representación esquemática es muy importante para resolver la situación planteada, permita que los alumnos diseñen su estrategia, dando el tiempo necesario y verifique que las justificaciones que den sean correctas. Si necesita orientarlos, primero utilice preguntas reflexivas o ejemplos más sencillos con la intención de que ellos mismos deduzcan cuál es la solución a las dudas que puedan tener.

Cómo enriquecer la actividad

Complemente la actividad haciendo algunas preguntas que tengan como propósito justificar por qué es necesario plantear una expresión algebraica de segundo grado.

Recursos y materiales

En la página *Encicloabierta* encontrará un interactivo que le permitirá trabajar con sus alumnos ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

http://www.encicloabierta.org/node/374

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Qué procedimiento usaron para diseñar la situación? Se espera que alumno la diseñe la situación.
- ¿Cómo se puede comprobar el resultado? Sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones originales para verificar la igualdad.

b) $2x + y = 6$
$x + 4y = 17$

- Escriban el problema que puede modelarse con la ecuación anterior. Permita que el alumno modele la ecuación con la ecuación anterior.
- Escriban en su cuaderno las operaciones realizadas.
- ¿Qué procedimiento utilizaron para plantear la situación?
- ¿Cómo se puede comprobar el resultado? Sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones originales para verificar la igualdad.

2. Contrasten sus resultados con los de otros equipos, y con la ayuda del profesor analicen las estrategias que utilizaron para plantear cada situación y determinen: ¿cuál fue la base que les permitió realizar cada planteamiento, ¿y es posible solucionar por otros métodos los problemas que plantearon?

PRACTÍCALO **Actividad 1.5**

1. Pedro compró un terreno pequeño y tiene la intención de construir un invernadero, para ello debe dividirlo en 9 partes iguales, al hacer algunas operaciones concluyó que lo ideal es que en cada sector el largo debe ser 4 metros más grande que el ancho y cada uno queda con una área de 77 m^2.
   a) Diseñen en su cuaderno una estrategia que les permita conocer las medidas del largo y el ancho de cada sector y escriban las operaciones que consideren necesarias.
   - Realicen en su cuaderno un esquema que modele la situación planteada
   - ¿Qué estrategia decidieron utilizar para resolver esta situación? Plantear una ecuación cuadrática.
   - ¿Por qué consideran que su procedimiento es el más adecuado? Porque permite modelar la situación dada para darle solución.
   - ¿Qué expresión algebraica modelaron para poder encontrar la solución del problema? $x^2 + 4x - 77 = 0$
   - ¿Qué características tiene esta expresión algebraica? Es una ecuación de segundo grado completa.
   - Registren, en su cuaderno, las operaciones que realizaron para conocer las dimensiones de cada sector.
   - ¿Cuánto mide de largo de cada sector? 11 metros
   - ¿Cuánto mide de ancho? 7 metros
   - ¿De qué manera es posible comprobar que estos resultados son correctos? Sustituyendo los valores en la ecuación original para comprobar la igualdad.
2. Contrasten sus procedimientos y resultados con algunos de sus compañeros y, con la ayuda de su profesor, determinen cuál es la expresión algebraica más adecuada para modelar la situación dada y cuál es el procedimiento de solución pertinente.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

PRACTÍCALO

Actividad 1.6

1. Tomando como base las conclusiones de la actividad anterior, planteen para cada expresión cuadrática una situación que modele cada una y resuélvanlas.

a) $21x^2 = 7x$

- Escriban la situación que se puede modelar con esta expresión.
  El alumno mostrará su habilidad para poner en práctica lo que ha aprendido.
- ¿Qué estrategia utilizaron para adaptar la expresión algebraica a la situación que crearon?
  Las estrategias que puede decir el alumno son diversas para adaptar la expresión algebraica.
- ¿Qué tipo de expresión algebraica es? Cuadrática o de segundo grado.
- ¿Qué procedimiento permite encontrar la raíz o solución?
  La factorización o la fórmula general.
- En el siguiente espacio, registren las operaciones que realizaron.

$$21x^2 = 17x \qquad a = 3 \quad b = -1 \quad c = 0 \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{6} \qquad x_1 = \frac{1+1}{6} \qquad x_2 = \frac{1-1}{6}$$

$$\frac{21x^2}{7} = \frac{7x}{7} \qquad x = \frac{-b \pm b^2 - \sqrt{4ac}}{2a} \qquad x = \frac{1+1}{6} \qquad x_1 = \frac{1+1}{6} \qquad x_2 = \frac{1-1}{6}$$

$$31x^2 - x = 0 \qquad x = \frac{-(-1)^2 - \sqrt{4\,(3)\,(0)}}{2\,(3)} \qquad x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = 0$$

- ¿Cuál es el valor de x? $x_1 = \frac{1}{3}$
- ¿Cómo se puede demostrar que esta respuesta es correcta?
  Sustituyendo en la ecuación original para verificar la igualdad a cero.
- ¿Consideran que hay alguna otra manera de solucionar esta situación? Sí
  Expliquen su respuesta. Se puede llegar a esta misma solución si se factoriza la ecuación.

b) $3y^2 = 300$

- Escriban la situación que se puede modelar con esta expresión.
  Los modelados que presente el alumno son variados.
- ¿Qué estrategia utilizaron para adaptar la expresión algebraica a la situación que crearon?
  Lo importante es que explique la estrategia que utilizaron.
- ¿Qué tipo de expresión algebraica es? Cuadrática o de segundo grado.
- ¿Qué procedimiento permite encontrar la raíz o solución?
  Despejar la incógnita o usar la fórmula general.
- En el siguiente espacio, registren las operaciones que realizaron

$$3y^2 = 300 \qquad y = \sqrt{100}$$

$$3y^2 = \frac{300}{3} \qquad y = 10$$

$$3y^2 = 100$$

Qué observar

Este problema se resuelve por medio de una ecuación cuadrática incompleta mixta, hay que observar si los alumnos recuerdan que una de sus soluciones siempre es cero y lo que representa gráficamente. Observe cómo determinan el método de solución y que comprueben sus resultados.

Curiosidades, acertijos y más

Acabo de escribir un número, que al elevarlo al cuadrado y volver a elevarlo al cuadrado y multiplicarlo por el número que escribí, obtengo un número de siete cifras que acaba en 7. ¿Qué número escribí?

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Cuál es el valor de y? 10
- ¿Cómo se puede demostrar que esta respuesta es correcta?
  Sustituyendo en la ecuación original para comprobar la igualdad.
- ¿Consideran que hay alguna otra manera de solucionar esta situación? Sí
  Expliquen su respuesta. Utilizando la fórmula general.

c) $x^2 - 9x = 18$

- Escriban la situación que se puede modelar con esta expresión.
  La riqueza de la actividad estará en las diversas estrategias que utilizaron para adaptar la expresión.
- ¿Qué estrategia utilizaron para adaptar la expresión algebraica a la situación que crearon?
  De segundo grado o cuadrática.
- ¿Qué tipo de expresión algebraica es? De segundo grado o cuadrática.
- ¿Qué procedimiento permite encontrar la raíz o solución?
  La factorización o la fórmula general.
- En el siguiente espacio registren las operaciones que realizaron.

$x^2 + 9x = -18$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$a = 1 \quad b = -9 \quad c = 18$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(18)}}{2(1)}$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2}$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} \quad x = \frac{9 \pm 3}{2}$

$x_1 = \frac{9+3}{2} \quad x_2 = \frac{9-3}{2}$

$x_1 = \frac{12}{2} \quad x_2 = \frac{6}{2}$

$x_1 = 6 \quad x_2 = 3$

- ¿Cuál es el valor de x? $x_1 = 6 \quad x_2 = 3$
- ¿Cómo se puede demostrar que esta respuesta es correcta?
  Sustituyendo el valor de x en la ecuación original para demostrar la igualdad.
- ¿Consideran que hay alguna otra manera de solucionar esta situación? Sí
  Expliquen su respuesta.
  Por factorización

2. Contrasten sus planteamientos y respuestas con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen: ¿qué características de las expresiones cuadráticas les permitieron modelar cada situación?, ¿cuál es la manera que consideran más adecuada para resolver cada una?, y ¿qué procedimiento permite verificar los resultados obtenidos?

Para leer más

Una manera de diseñar un problema es pensar primero en los números y las operaciones que los relacionan y transformarlos en una pregunta, por ejemplo:

$x + \frac{1}{2}x = 340$ podría ser, ¿a qué número hay que sumarle la mitad de sí mismo para que el resultado sea trescientos cuarenta?, y a partir de esta pregunta elaborar algún contexto, por ejemplo:

El papá de Luis le dijo que del dinero que ahorrara durante una semana le daría la mitad más para ayudarlo, si en total ahora tiene \$340, ¿cuánto dinero ahorró en la semana y cuánto le dio su papá?

Cambiando números

Indique al alumno que la ecuación a desarrollar debe ser:

$x^2 - 9x = -18$

Reflexión

Las Matemáticas significan esencialmente la existencia de un algoritmo mucho más preciso que el lenguaje ordinario. La historia de la ciencia atestigua que la expresión en lenguaje ordinario a menudo precedió a la formulación matemática, a la invención de un algoritmo.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

Para tener en cuenta

Al resolver una situación matemática es conveniente que tengas en cuenta estos 5 aspectos:

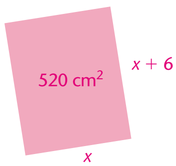
1. *Leer y entender* la situación, esto significa que debes ser capaz de explicarla con tus propias palabras.
2. *Identificar datos*, todos los que sean útiles y diferenciarlos de preguntas o información adicional.
3. *Identificar preguntas*, esto significa que debes ser capaz de decir claramente qué es lo que estás tratando de responder.
4. *Realizar un planteamiento*, decidir de qué manera vas a resolver la situación, qué operaciones vas a utilizar y por qué lo decidiste así.
5. *Resolver y comprobar*, en esta etapa realizas las operaciones o algoritmos necesarios para encontrar la solución del problema y comprobar los resultados.

LO QUE APRENDÍ

1. Analiza la situación dada y responde las preguntas.

   a) Un cuaderno profesional de hojas blancas tiene 520 cm² de área y se sabe que su largo es 6 cm mayor que su ancho. Con estos datos diseñen una estrategia que les permita conocer las dimensiones del cuaderno.

   - Elabora un esquema que represente esta situación.



   - ¿Cuál fue la estrategia que diseñaste? Descríbela.
     Se relaciona la base y la altura con las expresiones algebraicas que la representan.
   - ¿Qué expresión algebraica te permite encontrar la solución? $x^2 + 6x - 250 = 0$
   - ¿De qué tipo es esta expresión algebraica? Cuadrática o de segundo grado.
   - Anota las operaciones que realizaste.

$$x(x+6) = 250$$
$$x^2 + 6x - 520 = 0$$
$$a = 1 \quad b = 6 \quad c = -520$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-520)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{36 + 2080}}{2}$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 2116}}{2}$$
$$x = \frac{-6 \pm 46}{2}$$
$$x = \frac{9 + 46}{2}$$
$$x_1 = \frac{9 + 46}{2}$$
$$x_1 = 20$$
$$x_2 = \frac{-6 - 46}{2}$$
$$x_2 = \frac{-52}{2}$$
$$x_2 = -26$$

Bitácora pedagógica

Qué observar

La situación que se plantea tiene un nivel de dificultad similar a las anteriores; por lo tanto, puede permitir que el alumno la resuelva por sus propios medios. Observe cómo plantea y decide resolver la ecuación que modela la situación, y la seguridad con la que realiza estos procesos.

Cómo enriquecer la actividad

Al final de la actividad puede seleccionar a algunos alumnos para que expliquen el planteamiento y los métodos de solución que utilizaron. Enfatice la forma como decidieron asignar literales y cuál valor tomaron como base; es posible que los planteamientos sean distintos y los métodos de solución también, por lo que analizarlos ampliará el criterio de los alumnos.

Curiosidades, acertijos y más

Diego y Samuel visitaron Inglaterra. Ya en el aeropuerto, a punto de regresar, quisieron comprarse el mismo libro. A Diego le faltaban 5 libras esterlinas y a Samuel 3, así que decidieron juntar su dinero para comprar un solo libro y compartirlo, pero descubrieron que todavía les faltaba dinero. ¿Cuántas libras esterlinas cuesta el libro?

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Cuántas soluciones hacen verdadera la expresión algebraica que planteaste? Dos

 ¿Por qué ocurre esto? Es debido a que la raíz cuadrada tiene dos soluciones.

- ¿Cómo puedes comprobar que tu resultado es correcto?

 Sustituyendo en la ecuación original para verificar la igualdad.

- ¿Consideras que es posible encontrar la solución utilizando algún otro procedimiento?

 Argumenta tu respuesta. Factorizando

2. Contrasta tus procedimientos y resultados con los de tus compañeros y, con la ayuda del profesor determina cuál es la importancia de saber plantear ecuaciones y seleccionar el método más conveniente de solución para resolver una situación como ésta.

Qué observar

En esta actividad los alumnos requieren realizar algunas operaciones antes de llegar a la ecuación que resuelve la situación dada, observe cómo la plantean y cómo utilizan la fórmula para calcular el área de un triángulo en relación con la expresión algebraica. Permita que los equipos resuelvan sus dudas entre ellos y no descuide el orden y el tiempo destinados para esta actividad.

USA LAS TIC

Para reafirmar los algoritmos al resolver ecuaciones te recomendamos visitar la página http://www.thatquiz.org/es-0/matematicas/algebra/ (Consultada el día 27 de abril de 2013, a las 13:00 horas), selecciona la opción "resolver" (x) y soluciona los ejercicios subiendo el nivel de manera gradual. Después de tu visita comenta tus impresiones con tu profesor y concluye, ¿qué ventajas tiene utilizar un recurso como éste al momento de trabajar con problemas?

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipo, analicen la siguiente situación y respondan las preguntas.
 a) Un triángulo rectángulo tiene un área de 105 cm^2, y se sabe que las medidas de su base y su altura son números consecutivos. Diseñen una estrategia que les permita conocer sus dimensiones.
  - ¿Cuál de las dimensiones tomaron como base para diseñar su estrategia? La altura ¿Porqué? Porque es la medida menor, lo que permite expresar en términos positivos la base.
  - ¿Con qué letra representaron esta dimensión? x
  - ¿Qué expresión algebraica modela esta situación? $\frac{x(x+1)}{2} = 105$
  - ¿De qué tipo de ecuación se trata? De una ecuación cuadrática.
  - ¿Cuál es el procedimiento de solución que consideran más adecuado? La fórmula general
  - ¿Por qué lo consideran así? Porque el término independiente es muy grande para que se factorice con comodidad .
  - ¿Cuáles son las dimensiones de la base y la altura? Base: 15 Altura: 14
  - ¿Consideran que existe algún otro procedimiento para encontrar la solución a esta situación? 14 Justifiquen su respuesta. Se puede resolver por tanteo o por factorización.
  - ¿De qué manera pueden comprobar que su resultado es correcto? Sustituyendo en la ecuación original para comprobar la igualdad.
2. Contrasten sus resultados con los de otros equipos y con la ayuda del profesor determinen cuál es la importancia de saber combinar procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos al resolver una situación como la que se plantea.

Cómo enriquecer la actividad

Compartir los planteamientos, desarrollo y justificaciones de situaciones como ésta siempre es enriquecedor para todo el grupo. Fomente la comunicación entre los alumnos y motive la actitud participativa, de manera que expongan su trabajo con tranquilidad y confianza sabiendo que no los están juzgando, sino que al contrario, están colaborando para la comprensión del trabajo realizado.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 2	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

ACUÉRDATE DE...

1. Para empezar, es necesario que tengan a la mano algún material que puedan cortar y de preferencia modelar, como plastilina, arcilla o barro.

   a) Construyan 5 cilindros y 5 conos de un tamaño que consideren adecuado. También pueden adquirir estas figuras hechas de unicel.

   b) Realicen un corte recto en cada cuerpo, procurando que cada uno forme una figura geométrica distinta.

   - Tracen las figuras geométricas que obtuvieron al cortar los cilindros.

     Se espera que los alumnos tracen figuras como circunferencias, elipses, rectángulos, triángulos o trapecios.

   - En su cuaderno, tracen todas las figuras obtenidas a partir del corte de los conos.

   c) Respondan las siguientes preguntas.

   - ¿Qué estrategia utilizaron para que los cortes en los cilindros no fueran iguales? Permita que el alumno explique sus métodos.
   - ¿Utilizaron la misma estrategia para cortar los conos o una distinta? Depende del alumno
   - ¿Hay figuras geométricas similares para el cono y para el cilindro? Sí

     ¿Por qué ocurre esto? Porque al hacer cortes se obtiene una figura plana, por ejemplo, al cortar un cono o un cilindro se puede obtener un círculo.
   - ¿Conocen el nombre de todas las figuras geométricas que se formaron? Se espera que sí

     Registren los nombres. Rectángulo, triángulo, círculo, trapecio y elipse.
   - ¿Qué objetos de la vida cotidiana consideran que fueron realizados a partir de alguna de estas figuras? Se espera que los alumnos mencionen objetos de uso común, por ejemplo, utensilios domésticos, partes mecánicas, aparatos eléctricos, etcétera.

2. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen cuántas figuras geométricas distintas es posible obtener a partir de la realización de cortes rectos en un cono y en un cilindro, y elaboren una hipótesis acerca de cuál consideran que es su aplicación en la vida cotidiana.

Qué observar

Aunque la idea de la actividad es práctica, la imaginación espacial y la observación es muy importante. Ponga atención en cómo se comportan los alumnos y tome las debidas precauciones para que la actividad se desarrolle de manera fluida, evitando contratiempos innecesarios.

Cómo enriquecer la actividad

Puede pedir a los alumnos que elaboren bocetos y tomen notas, que después utilizarán para contestar en limpio la actividad. Trate de relacionar las figuras que obtengan con objetos de la vida cotidiana y de resaltar la importancia que tienen.

Recursos y materiales

En la página *Recursos Encicloabierta*, en la sección "secciones cónicas", se presenta un interactivo que puede servir como introducción para trabajar este tema.

http://recursos.encicloabierta.org/telesecundaria/3tls/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b05_t02_s01_descartes/index.html

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO — **Actividad 2.1**

1. Observen las imágenes, analicen los cortes realizados a un cilindro por medio de un plano, completen la tabla y contesten las preguntas.

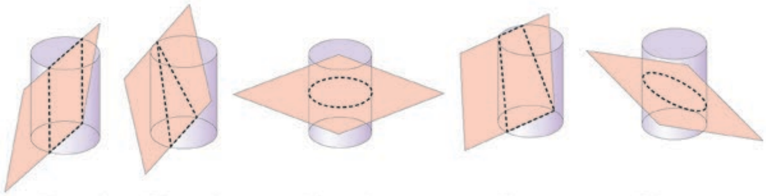


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

a) Completen la tabla registrando la figura que se obtiene de cada corte y la descripción de la forma en que se elaboró cada uno de ellos.

Figura	Figura obtenida al hacer el corte	Forma en que se hizo el corte
1	Rectángulo	Por el diámetro y perpendicular a la altura.
2	Triángulo	De un punto de la circunferencia al diámetro de la base opuesta.
3	Círculo	Paralelo a las bases a la mitad de la altura.
4	Trapecio	De una cuerda en la base superior al diámetro de la base inferior.
5	Elipse	De manera oblicua a la altura del cilindro.

b) Bajo la supervisión del profesor, hagan los cortes que acaban de analizar y utilicen los materiales sugeridos en la sección "Acuérdate de..." (plastilina, unicel, barro, arcilla).

- ¿Consideran que es posible realizar algún corte distinto a los mostrados en la imagen? No
  Expliquen su respuesta. A fin de cuentas al realizar otros cortes se obtienen las mismas figuras.
- ¿En qué objetos de la vida cotidiana se utilizan este tipo de cortes? Den algunos ejemplos.
  Depende del alumno., entre ellas podría ser cuchuchas, etcétera.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

2. Analicen los objetos mostrados en la siguiente imagen y contesten las preguntas.

- La figura 1 es una teja de las que se utilizan para decorar las fachadas de las casas, ¿a partir de qué corte se obtiene esta forma? De un corte paralelo a la altura del cilindro tomando como base una cuerda.

Qué observar

El uso adecuado del lenguaje matemático, en la descripción de los cortes de los cilindros, es importante para la correcta comprensión de estos. Ponga atención en cómo utilizan estos términos, y sobre todo que comprenden su significado. Permita que comenten sus observaciones, además de que logren establecer una relación entre las figuras obtenidas y los objetos que conocen en su vida cotidiana, esto con la intención de que valoren su utilidad.

Cambiando números

Comente al alumno que considere que el asador debe ser la mitad de un cilindro partido por lo largo.

Curiosidades, acertijos y más

Las estructuras cónicas fueron descubiertas por el matemático griego Menecmo, y la descripción detallada por el matemático griego Apolonio de Perga (262-190 a.C), quien estudió las propiedades de las curvas cónicas.

Bitácora pedagógica

232

BLOQUE 5

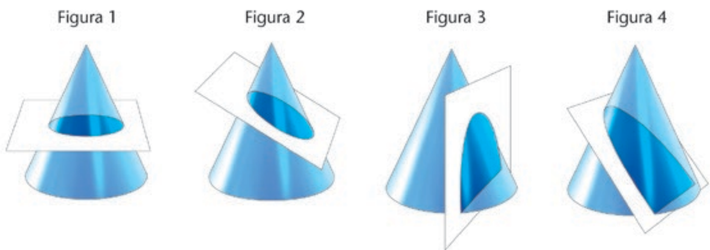
- La figura 2 muestra filtros para aspiradoras y la figura 4 es un codo para tubería, ¿a partir de qué figura se pueden obtener estos cortes? De un cilindro
- La figura 3 es una pala dispensadora, ¿cómo consideran que se realizó el corte para formarla? De manera oblicua y curva a la altura del cilindro.
- La figura 5 es un asador sencillo, ¿cómo se realizó el corte del cilindro para poder hacerlo? Por el diámetro perpendicular a la altura.

3. Contrasten sus respuestas con las de de sus compañeros, y con la ayuda del profesor definan de manera concreta qué figuras geométricas se pueden obtener al realizar cortes por medio de un plano en un cilindro, y cuál es su aplicación práctica en la vida cotidiana.

PRACTÍCALO

Actividad 2.2

1. Analiza los cortes realizados a un cono por medio de un plano, completa la tabla y contesta las preguntas.



a) Completa la tabla indicando la figura que se busca en cada corte y la forma en que se realizó cada uno.

Figura	Figura obtenida al hacer el corte	Forma en que se hizo el corte
1	Circunferencia	Paralelo a la base.
2	Elipse	Oblicuo con respecto a la base.
3	Hipérbola	Perpendicular a la base.
4	Parábola	Oblicuo a la base y además cortándola.

- El cono es una figura de revolución, es decir, se forma a partir de la rotación, ¿qué figura se utiliza como base para crear un cono? Un triángulo rectángulo
- ¿Qué objetos de la vida cotidiana conoces que estén formados a partir de los cortes realizados a un cono? Se esperan respuestas como “barquillos de helado” o “vasos de papel para agua”.
- ¿Consideras que es posible realizar algún corte distinto que permita obtener otra figura? No

  Justifica tu respuesta. Se obtienen figuras similares a las ya señaladas.

2. Contrasta tus respuestas con las de compañeros, y con la asesoría del profesor define cuáles son las principales características de las figuras cónicas. Formula una hipótesis que explique la utilidad que tienen en la vida cotidiana.

Qué observar

En esta sección es importante utilizar el lenguaje matemático adecuado para indicar las figuras obtenidas y los tipos de corte realizado. Vigile que los alumnos los utilizan de manera adecuada y que comprenden su significado. Recuerde que en estudios posteriores estos conceptos serán muy importantes y es necesario que les queden lo más claro posible.

Cómo enriquecer la actividad

Las aplicaciones de las cónicas en la vida cotidiana son muchas, puede enriquecer esta actividad si utiliza medios auxiliares, como una sala de medios o un proyector, también puede analizar en clase algunos objetos que tengan como base algún corte sobre un cono. Recuerde que si los alumnos pueden manipular los objetos, no solo están utilizando la vista y el oído, sino también el tacto como un recurso de aprendizaje.

Bitácora pedagógica

Reflexión

“A veces se dice que al enseñar matemáticas debemos enfatizar el proceso de matematización. Yo digo: ¡Excelente! Pero a condición de que el estudiante debe tener él mismo la experiencia de matematizar.”

Qué observar

Técnicamente un cono también tiene relación con una circunferencia y un triángulo rectángulo, observe que los alumnos consideran esto para realizar esta actividad. Verifique que plantean, resuelven y comprueban sus operaciones de manera adecuada, y si requiere resolver dudas, primero utilice preguntas reflexivas o ejemplos ilustrativos antes de darles la solución directa.

Cómo enriquecer la actividad

Sería ideal poder utilizar conos reales para analizarlos en clase, pueden conseguir algunos o bien diseñarlos con materiales sencillos, como papel grueso o cartulina, si fuera posible que realizaran esta actividad de manera física, sería ideal para mejorar la comprensión del tema, sobre todo porque estarían trabajando con medidas reales, y además la actividad sería mucho más amena.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

El alumno en esta área de estudio visitó el laboratorio escolar, y trabajó con materiales de cristalería que tienen diferentes formas. Solicite que realicen una lista y un dibujo de los materiales que presentan una estructura cilíndrica y cónica.

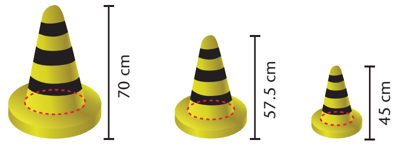
Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 2.3

1. Nicolás es policía de tránsito, hoy recibió algunos conos viales porque debe prepararlos para ponerles luz ya que se van a utilizar por la noche.

   Sabe que todos los conos tienen la misma forma, sin embargo tienen diferentes alturas. Conoce la medida del diámetro y la altura del primero, pero necesita conocer el radio del cono mediano y del pequeño para poder hacer las bases de los focos que les va a colocar.



Diámetro 30 cm

   a) Diseñen una estrategia que les permita conocer el radio de los tres conos y de esta manera poder investigar la superficie de cada círculo. Regístrenla. Depende de la estrategia que utilice el alumno para conocer la superficie de cada círculo.
   - ¿Cuánto mide el radio del cono mediano? 12.3 cm
   - ¿Qué operación realizaron para obtener este resultado? Con una proporción
   - ¿Es posible llegar a este mismo resultado usando algún otro procedimiento? Sí

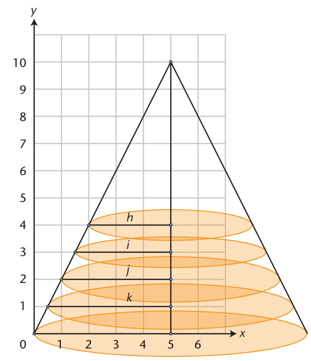
     Justifiquen su respuesta. Es posible investigarlo por tanteo o elaborando una tabla, sin embargo, ambos son métodos muy tardados.
   - ¿Cuánto mide el radio del cono pequeño? 9.6 cm ¿Usaron nuevamente la misma estrategia? Sí ¿Porqué? Se utilizan las mismas operaciones.
   - ¿De qué manera es posible comprobar que estos dos resultados son correctos? Sustituyendo en las proporciones y comprobando la igualdad entre ellas.
   - Si hubiera una medida intermedia entre el cono grande y el mediano, ¿cuál sería la longitud de su radio?

2. Contrasten sus procedimientos y resultados con los obtenidos por otros equipos, y con la ayuda del profesor determinen qué alternativas de solución tiene Nicolás para resolver su problema y cuál es la que consideran más adecuada, argumenten sus razones.

PRACTÍCALO

Actividad 2.4

1. Nicolás se preguntó: ¿qué ocurre con la longitud del radio cuando se realizan cortes planos paralelos a la base circular de un cono? Analiza la siguiente imagen.



   - ¿Cuánto mide el diámetro del cono original? 10 u
   - ¿Cuánto mide la altura? 10 u
   - ¿Qué expresión permite conocer la medida de k, es decir, de la medida del radio después del primer corte? $\frac{10}{9} = \frac{5}{k}$
   - ¿Qué tipo de expresión es? Es una proporción, una ecuación de primer grado.
   - ¿Qué operación es necesario plantear para encontrar el valor de j? $k = \frac{(9)(5)}{10}$

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

- ¿Se utiliza una expresión similar para encontrar los valores de *h* e *i*? Sí
  ¿Por qué ocurre esto? Porque estas líneas guardan una proporción entre sí.

- ¿De qué otra manera es posible encontrar la reducción del radio al realizar cortes paralelos a la base de un cono? Tomando la medida directamente.

a) Tomando como base los resultados que obtuviste, completa la tabla con los valores que relacionan el radio y la altura.

Altura	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Radio	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5

- En tus propias palabras, ¿cuál es la relación que hay entre la altura y el radio de un cono si se realiza algún corte sobre éste? Hay una relación proporcional.

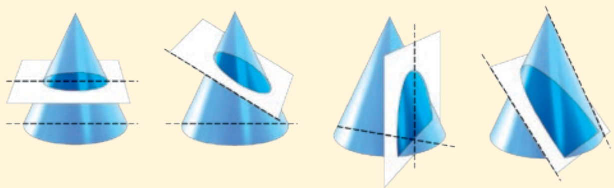
- ¿Qué estrategia consideras adecuada si se quisiera conocer la medida de los siguientes cortes hasta tener a la unidad como altura? En este caso la altura es el doble del radio.

2. Contrasta tus resultados con los de tus compañeros y con la ayuda del profesor analiza los procedimientos algebraicos y trigonométricos de solución a esta situación y determina cuál es la conveniencia de utilizar cada uno.
3. Redacta en tu cuaderno una conclusión breve que explique cuál es la relación entre la altura y el radio de un cono al realizar algún corte paralelo a la base.

Para leer más

1. Las figuras obtenidas al cortar un cono son:

1. Circunferencia 2. Elipse 3. Hipérbola 4. Parábola



Paralelo a la base | Oblicuo a la base | Perpendicular a la base | Paralelo a la generatriz

Para tener en cuenta

La hipotenusa de un triángulo rectángulo, al girarse sobre uno de sus catetos, forma la superficie del cono, a ésta se le llama *generatriz*.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Dé el tiempo suficiente para que los alumnos analicen la imagen mostrada, son varias las conclusiones que deben obtener a partir de los triángulos, círculos y el plano mostrados. Esta actividad requiere el uso de muchas cantidades y operaciones, verifique que el alumno comprende el proceso que realiza y demuestra seguridad y confianza durante el desarrollo.

Cómo enriquecer la actividad

Puede utilizar el cuaderno como un auxiliar, donde los alumnos hagan "por separado" las figuras que se muestran en la ilustración, esto ayudará a que visualicen más claramente los datos de cada uno y provocará que se generen menos errores. Pida que estos apuntes se hagan en limpio y tómelos en cuenta como parte de esta actividad.

Recursos y materiales

En las siguientes dos páginas podrá obtener información que le será de utilidad para trabajar este tema.

http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/cylinderobliq.html

http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/cone.html

Cambiando números

Señale a los alumnos que en la indicación de la actividad 1 debe decir:

Ernesto está probando el haz de luz de su nueva lámpara, en la primera toma pudo medir un radio de 15 cm a una distancia de 75 cm, y luego realizó dos tomas más aumentando el radio en 5 cm cada una.

Qué observar

Esta actividad es muy deductiva, requiere que el alumno se concentre adecuadamente para poder interpretarla e "imaginar" los movimientos planteados con la lámpara. Observe que comprenden la idea de forma apropiada y que plantean y resuelven las operaciones de manera correcta.

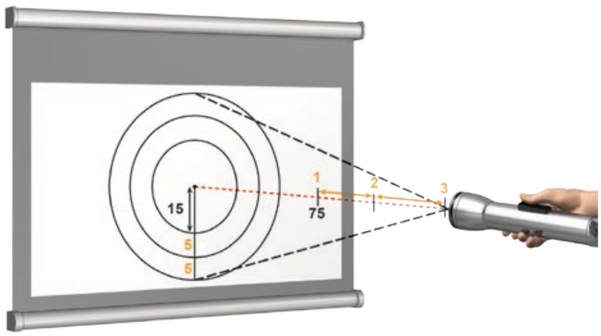
Cómo enriquecer la actividad

No es complicado conseguir una pequeña lámpara y una superficie de proyección para realizar una actividad similar físicamente. Si lo considera prudente, asigne el tiempo adecuado y prepare la actividad para ser realizada en clase, puede formar equipos de trabajo para que colaboren entre ellos, ya sea sujetando la lámpara, tomando medidas o bien haciendo el registro y operaciones en el cuaderno.

Matemáticas 3. Por competencias

LO QUE APRENDÍ

1. Ernesto está probando el haz de luz de su nueva lámpara, en la primera toma pudo medir un radio de 15 cm a una distancia de 75 m y luego realizó dos tomas más aumentando el radio en 5 cm cada una.



a) Diseña una estrategia que te permita conocer las distancias a las que tuvo que colocar la lámpara para realizar estas dos últimas tomas.

- ¿A qué distancia realizó la segunda toma? A 100 cm
- ¿A qué distancia se realizó la tercera toma? A 125 cm
- ¿Cuál fue la estrategia que decidiste utilizar para encontrar estos valores? Establecer una proporción
- ¿Qué expresión planteaste para encontrar la distancia de la segunda toma? Establecer una proporción
- ¿Fue necesario utilizar una expresión similar para encontrar la distancia de la tercera toma o usaste una distinta? Sí Justifica tu respuesta. Como las medidas son proporcionales se pueden obtener todas estableciendo la proporción adecuada.

2. Contrasta tu estrategia y tus resultados con algunos de tus compañeros y con la ayuda del profesor realicen un foro en el salón donde se opine acerca de la importancia del cono en la vida diaria, por ejemplo: en los fenómenos de óptica, en la repostería, en la construcción, en la industria metalúrgica, etcétera.

Glosario

Grafito. Es una de las formas que puede tener el carbono, el grafito al mezclarse con una pasta se usa para hacer las minas (o cilindros) que contiene un lápiz, tiene la característica de que es de color negro y se exfolia con facilidad.

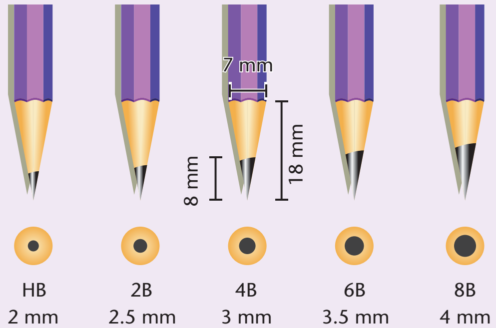
Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos y resuelvan el siguiente problema.

Muchos lápices tienen forma de prisma hexagonal, pero otros están hechos a base de cilindros, dentro de cada uno se encuentra un cilindro (o mina) de **grafito** y al sacarles punta se forma un cono; dependiendo del grueso que sea el cilindro de grafito será el grosor con el que éstos puedan marcar.

a) Analicen la imagen y diseñen una estrategia que les permita conocer la altura visible del cono que forma el grafito.

Bitácora pedagógica



- ¿Cuánto mide la altura del cono de grafito del lápiz HB? 5.33 mm
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar esta medida?
  Se establece una proporción con los datos dados para el lápiz 4B.
- ¿Cuál es la medida del cono de grafito para el lápiz 2B? 6.6 mm
- ¿Qué datos les permitieron calcular esta cantidad?
  La altura del cono de grafito y el diámetro indicado de cada circunferencia.
- ¿Cuánto mide la altura del cono de grafito para los lápices 6B y 8B?
  6B = 9.33 mm 8B = 10.66 mm
- ¿Fue necesario realizar las mismas operaciones que en las ocasiones anteriores? Sí ¿Por qué ocurrió esto?
  El procedimiento es similar, ya que en todas se mantiene una proporción.

2. Contrasten sus procedimientos y resultados con algunos de sus compañeros y con la supervisión de su profesor determinen cuál es la utilidad práctica de poder conocer las dimensiones del radio y la altura de un cono.

USA LAS TIC

Visita la página http://www.aulafacil.com/matematicas-segundo-eso/Curso/Lecc-28.htm (Consultada el día 27 de abril de 2013, a las 13:30 horas). En ella encontrarás información sintetizada e ilustraciones sencillas acerca de los sólidos de revolución, te permitirá contrastar y validar tus conocimientos, durante tu visita registra tus comentarios y observaciones, después de visitar la página es conveniente que tu profesor, por medio de una lluvia de ideas, comparta las experiencias de algunos de tus compañeros y obtengan una conclusión que explique, ¿cuál consideran que es la utilidad de conocer el desarrollo plano de un cilindro truncado?

Qué observar

Es poco común poner atención a cosas tan pequeñas como la punta de un lápiz; sin embargo, para quienes los usan sí es importante conocer su grosor y dureza. Cerciórese de que los alumnos hacen sus planteamientos y operaciones correctamente y manejan las unidades en milímetros. Observe la forma en que razonan la situación y oriéntelos, de ser necesario, por medio de preguntas reflexivas.

Cómo enriquecer la actividad

En esta actividad se aconseja utilizar del cuaderno como un recurso que les permita analizar las situaciones de manera individual, concentrarse en las operaciones y comprobar sus resultados.

En la escuela es común tener lápices de distintas formas y tamaños, incluso los que son de colores; de ser posible analice algunos en clase, además realice los cálculos que se solicitan en la actividad.

Bitácora pedagógica

Reflexión

"En la medida en que las leyes de las matemáticas se refieren a la realidad, no son exactas, y en tanto son exactas, no se refieren a la realidad."

Albert Einstein

Qué observar

El alumno debe ser capaz de deducir que faltan algunas medidas, como la altura del triángulo o la apotema del pentágono y buscar una estrategia para investigarlas. Observe que los alumnos distingan esto y que diseñen de forma adecuada una estrategia para resolver la actividad; de ser necesario, sugiera que revisen temas anteriores o ayúdelos por medio de preguntas reflexivas.

Cómo enriquecer la actividad

Esta actividad se presta para que algunos de los equipos expongan los métodos de solución. Es interesante analizarlos y determinar cómo se resolvieron, esto permitirá obtener la estrategia más adecuada, y al mismo tiempo le permitirá al grupo verificar sus procedimientos y resultados.

Recursos y materiales

En la página *pps.k12* encontrará información para trabajar este tema con los alumnos.

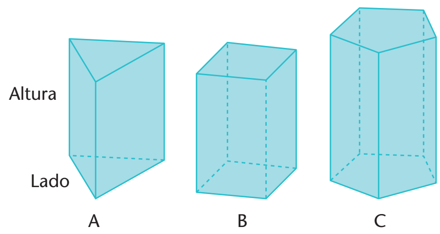
https://www.google.com.mx/#q=como+obtener+las+formulas+de+volumen+de+cilindros+y+conos

Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 3	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

ACUÉRDATE DE...

1. Analicen los prismas mostrados en la imagen, todos miden 5 cm por lado y tienen una altura de 10 cm.



a) Diseñen una estrategia que les permita conocer el volumen de cada uno y respondan las preguntas.

- En estudios anteriores ya han calculado el volumen de los prismas. Expliquen con sus propias palabras, cuál es el procedimiento para calcular el volumen. Se obtiene el área de la base y se multiplica por la altura.
- ¿De qué tipo de prisma es la figura A? Prisma triangular
- ¿Cuál es su volumen? 108.5 cm^3
- ¿Qué procedimiento hay que seguir para encontrar el área de la base? Primero se determina la altura del triángulo equilátero, luego se calcula el área de la base y se multiplica por la altura.
- ¿Qué expresión algebraica plantearon para encontrar el volumen? Regístrenla en su cuaderno, junto con el algoritmo que hicieron.
- ¿Fue necesario encontrar el valor de la altura para calcular el área de la base? ¿Por qué lo consideran así? Porque para conocer el área se debe conocer la altura y el único dato que se tiene es la medida del lado del triángulo equilátero.
- ¿Cuánto mide el volumen del prisma B? 250 cm^3
- ¿Qué estrategia siguieron para encontrar el volumen? Se eleva 5^2 para encontrar el área de la base y se multiplica por la altura (10).
- ¿De qué tipo de prisma se trata? Prisma cuadrangular
- ¿Qué expresión algebraica plantearon para encontrar el volumen? $V = (5^2)(10)$ Regístrenla en su cuaderno con el desarrollo del procedimiento.
- ¿Cuáles son las diferencias y las coincidencias que presentan los cálculos y las estrategias para calcular el volumen de la prisma B con respecto a prisma A? En esencia se hace lo mismo, se investiga el área de la base y se multiplica por la altura, pero en el prisma triangular hubo que investigar la altura del triángulo que forma la base.
- ¿Cuál es el volumen del prisma C? 430 cm^3
- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite encontrar el volumen? $V = (\frac{Pa}{2})h$ Regístrenla en su cuaderno con el desarrollo del procedimiento.
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar la medida de la apotema? Descomponiendo el pentágono en triángulos y uno de ellos dividiéndolo a la mitad.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

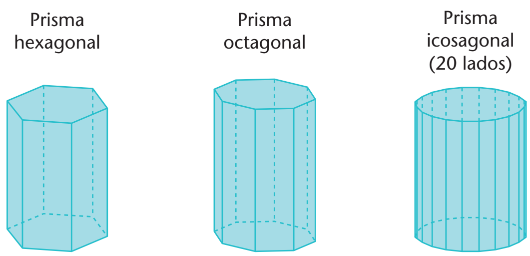
- ¿Qué diferencias y qué similitudes pueden observar en la estrategia o en las operaciones con respecto a los otros dos prismas? Las condiciones varían dependiendo del área de la base, pero una vez teniéndola todos multiplican a la altura del prisma.
- ¿Cómo se puede expresar de manera general cuál es el procedimiento para calcular el volumen de cualquier prisma recto? Se calcula el área de la base y se multiplica por la altura.
- ¿Qué ocurrirá si se incrementa de manera considerable el número de lados de la base del prisma? Se incrementaría el volumen, sin embargo, el procedimiento para calcularlo sigue siendo el mismo.

2. Contrasten sus resultados con algunos equipos cercanos y con la ayuda del profesor determinen de manera formal cuál es la forma de calcular el volumen de un prisma. Elaboren una hipótesis acerca de lo que consideren que influye en que el prisma tenga un número considerable de lados.

PRACTÍCALO

Actividad 3.1

1. Con base en sus conclusiones de la actividad anterior diseñen una estrategia para encontrar el volumen de los prismas mostrados en la imagen, considerando que la medida de cada lado y de la altura siguen siendo las mismas.



a) Respondan las preguntas.

- ¿Cuál es el volumen de los prismas? Hexagonal 649.5 cm^3 Octagonal 1208 cm^3 Icosagonal 7890 cm^3
- ¿De qué manera calcularon la apotema de cada uno de ellos? Dividiendo el polígono en triángulos y calculando la altura de uno de ellos.
- Al comparar el prisma de 20 lados con los dos anteriores, ¿consideran que esto influye de alguna manera en el cálculo del volumen? No Justifiquen su respuesta. El procedimiento es el mismo, solo cambian los valores utilizados.
- ¿A qué figura geométrica se parece el prisma icosagonal? Al cilindro
- ¿Qué ocurrirá si se incrementa a 50 el número de lados? Se incrementaría el volumen.

2. Contrasten sus respuestas con otras parejas y con la asesoría del profesor elaboren una hipótesis que explique cuál es la manera en la que se calcula el volumen de un cilindro si tomamos como referencia la forma en la que se calcula el volumen de los prismas.

Qué observar

En esta actividad la situación de la apotema es similar a la anterior, vigile que el alumno es capaz de calcularla y de realizar las operaciones correctas, además de comprobarlas.

Cómo enriquecer la actividad

Sería conveniente que analizara junto con ellos, el tamaño real de las figuras mostradas. En la ilustración se puede ver claramente la diferencia entre los lados; sin embargo, el tamaño real es diferente, esto le permitirá al alumno comprender mejor el porqué de la diferencia tan grande en el volumen de cada uno.

Curiosidades, acertijos y más

Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) hizo importantes aportaciones a la geometría. Inventó formas de calcular el área de ciertas figuras curvas, así como el cálculo de la superficie y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas.

Bitácora pedagógica

Qué observar

La idea de esta actividad es acercar a los alumnos a la formación de la fórmula del volumen de un cilindro. Dé el tiempo suficiente para la actividad y observe el desempeño del alumno durante la actividad, al final verifique que comprende cómo se realizan las operaciones de la fórmula, sin olvidar el uso de la jerarquía de operaciones.

Cómo enriquecer la actividad

Una manera de ilustrar esto, es practicar con estas figuras inscritas en una circunferencia y calculando su diferencia de áreas. Si lo considera prudente, planee esta actividad en el cuaderno, asigne un tiempo adecuado y considere este trabajo en la evaluación de esta actividad.

Reflexión

"Educar es depositar en cada hombre toda la obra humana que le ha antecedido, es hacer a cada hombre resumen del mundo viviente, hasta el día en que vive; es ponerlo a nivel a su tiempo, con lo que podría salir a flote sobre él"

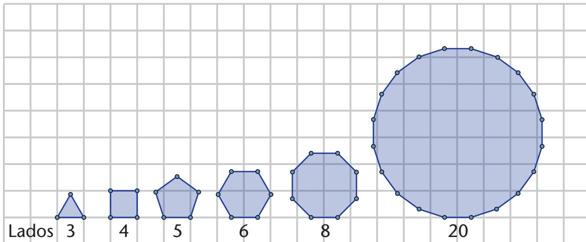
José Martí.

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO

Actividad 3.2

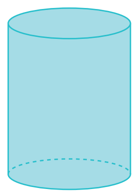
1. Las bases de los polígonos utilizados en las secciones anteriores están representadas en la imagen.



a) Analízala y contesta las preguntas.

- ¿ En qué polígonos el procedimiento para calcular su área es el mismo? En todos a partir del pentágono.
- ¿Por qué ocurre esto? Porque la fórmula del triángulo y del cuadrado son distintas.
- Si cada uno de ellos se inscribiera en una misma circunferencia, ¿qué ocurriría con la diferencia de áreas entre ambas figuras? Entre mayor sea el número de lados del polígono menor sería la diferencia con respecto al área del círculo.
- ¿Qué figura se forma si se incrementa una cantidad n de lados?
- ¿Cuál es la fórmula para calcular la superficie de un círculo? $A = \pi r^2$
- Entonces, si una circunferencia es el área de la base de un cilindro, así como un polígono regular es la base de un prisma recto, ¿cuál es el procedimiento para calcular el volumen de un cilindro? Se multiplica el área de la base por la altura del cilindro.
- En el siguiente esquema coloca las medidas necesarias y la fórmula que permite calcular el volumen de un cilindro.

Cilindro



Fórmula $V = \pi r^2 h$

2. Contrasta tus resultados con los de tus compañeros cercanos y con la ayuda del profesor determina la fórmula que permite encontrar el volumen de un cilindro y cuál es el procedimiento para desarrollar correctamente el algoritmo que representa.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

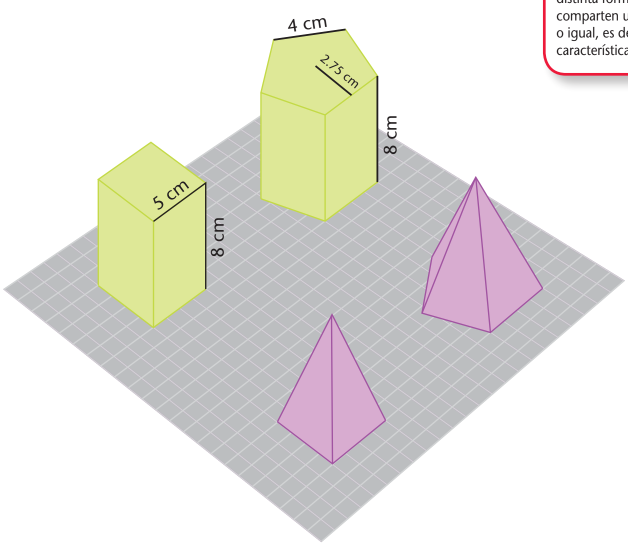
PRACTÍCALO

Actividad 3.3

1. En temas anteriores ya han calculado el volumen de pirámides regulares, ahora analicen los prismas y pirámides mostrados en la imagen y determinen una estrategia que les permita encontrar el volumen de cada pirámide, si se sabe que las **bases homólogas** son iguales y las alturas de las 4 figuras es la misma.

Glosario

Bases homólogas. Se refiere a dos sólidos que tienen distinta forma, pero que comparten una base semejante o igual, es decir, que poseen características en común.



- ¿Cuál es el volumen del prisma cuadrangular? 200 cm^2
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide cuadrangular? 66.6 cm^2
- ¿Cuál es el volumen del prisma pentagonal? 220 cm^2
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide pentagonal? 73.33 cm^2
- ¿Qué procedimiento emplearon para encontrar estas medidas? Para el prisma se calcula el área de la base y se multiplica por la altura, en la pirámide, además de esto, se divide entre tres.
- ¿Cómo se calcula el volumen de una pirámide que tiene como base un polígono regular? Se obtiene el área de su base, se multiplica por la altura y este producto se divide entre tres.
- Escriban una expresión algebraica que de manera general represente el volumen para cualquier pirámide. $V = \frac{1}{3} A_b h$ (Un tercio del área de la base por la altura).

2. Contrasten sus resultados y respuestas con los de los otros equipos y con la ayuda del profesor elaboren una definición formal que explique la relación entre el volumen de un prisma y una pirámide con bases y alturas congruentes.

241

Qué observar

La idea de la actividad es que concluyan que el volumen de la pirámide es la tercera parte del prisma que la contiene, así que principalmente vigile que los alumnos desarrollen correctamente los algoritmos de cada una, y que comprendan que esto ocurre para cualquier pirámide.

Cómo enriquecer la actividad

Lo ideal sería complementar esta actividad con un experimento, de ser posible consiga o construya los prismas mostrados y llénelos con granos o semillas, de esta manera el alumno se dará cuenta que con el contenido de 3 pirámides llena totalmente un prisma.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

El alumno ha visitado el laboratorio y ha tenido conocimiento de diversos materiales que miden el volumen de sustancias líquidas. Pídales que hagan la lista de diez materiales de forma cilíndrica y cónica, y qué cantidad de volumen miden.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta actividad es de reforzamiento, permita que las parejas trabajen con libertad, siempre vigilando el orden y respetando el tiempo asignado; ponga especial atención a la forma como plantean y resuelven las operaciones, y que son capaces de comprobar sus resultados.

Cómo enriquecer la actividad

Puede solicitar a algunas parejas que expongan sus operaciones, resultados y comprobaciones frente al grupo, la intención es que los demás tengan oportunidad de comparar sus procedimientos, verificar sus resultados y obtener seguridad en sus planteamientos.

Recursos y materiales

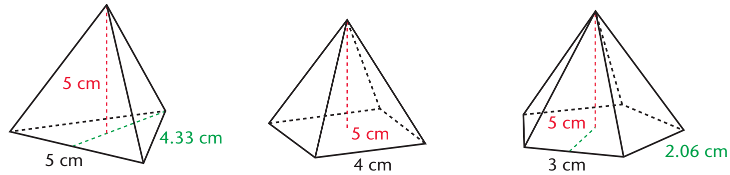
En la página *descartes 3D* encontrará un simulador para trabajar este tema con sus alumnos.

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/redondos/vcilindro.htm

PRACTÍCALO

Actividad 3.4

1. Tomando en cuenta las conclusiones de la actividad anterior, calculen el volumen de las siguientes pirámides y respondan las preguntas.



- ¿Cuánto mide el volumen de la pirámide triangular? 18.04 cm^3
- ¿Qué procedimiento emplearon para calcular el volumen de esta pirámide? Se encuentra el área de la base, se multiplica por la altura y se divide entre tres.
- ¿Qué expresión algebraica tuvieron que plantear para encontrar el resultado? $V = \frac{1}{3}(10.825)(5)$
- ¿Cuánto mide el volumen de la pirámide cuadrangular? 26.66 cm^3
- ¿Qué procedimiento emplearon para calcular el volumen de esta pirámide? Se encuentra el área de la base, se multiplica por la altura y se divide entre tres.
- ¿Qué expresión algebraica plantearon para poder encontrar el resultado? $V = \frac{1}{3}(16)(15)$
- ¿En qué se diferencian las operaciones anteriores? En la manera en la que se obtiene el área de la base.
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide pentagonal? 25.75 cm^3
- ¿Qué expresión algebraica plantearon para encontrar el resultado? $V = \frac{1}{3}(15.45)(5)$
- ¿Qué es lo que tienen en común estas tres expresiones? En todos los volúmenes es un tercio del producto del área de la base por la altura.
- ¿Se puede observar lo mismo si se tienen más lados en la base de la pirámide? Sí

  ¿Por qué ocurre esto? Porque el volumen de una pirámide es la tercera parte del prisma que la contiene.

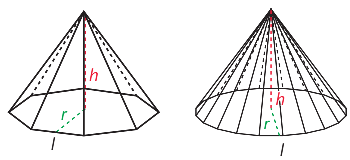
2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros, y con la ayuda del profesor planteen una hipótesis que indique: ¿qué ocurre con el volumen de una pirámide si se incrementa el número de lados de base a pesar de conservar la misma altura?

PRACTÍCALO

Actividad 3.5

1. Analicen las siguientes pirámides y calculen el volumen de cada una, después contesten las preguntas.

- ¿Cuál es el volumen de la pirámide octagonal? 44.37 cm^3
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide icosagonal? 105.33 cm^3
- ¿Qué procedimiento utilizaron para encontrar ambos volúmenes? Calcular el área de la base, multiplicar por la altura y dividir entre tres.



l = 2 cm
r = 2.08 cm
h = 8 cm

l = 1 cm
r = 3.16 cm
h = 10 cm

Bitácora pedagógica

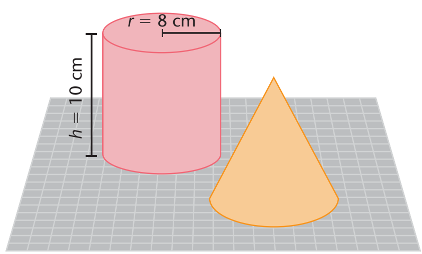
- ¿Qué expresiones algebraicas tuvieron que plantear para encontrar los resultados?
  $V = \frac{1}{3}(16.64)(8)$ $V = \frac{1}{3}(31.6)(10)$ Respectivamente.
- ¿Qué ocurrirá si se aumenta *n* veces el número de lados de la base de una pirámide?
  Sería un cono
- ¿De qué manera consideran que es posible calcular el volumen de un cono?
  Obteniendo el volumen del cilindro que lo contiene y dividirlo entre tres.

2. Contrasten sus resultados con los de los otros equipos, y con la asesoría del profesor elaboren una hipótesis breve que explique qué similitud tiene la forma de encontrar el volumen de una pirámide regular con el procedimiento para encontrar el volumen de un cono.

PRACTÍCALO

Actividad 3.6

1. Analicen la imagen mostrada y calculen el volumen del cilindro y, a partir de éste, encuentren el volumen del cono sabiendo que ambos sólidos tienen la misma altura y base.



- ¿Cuánto mide el volumen del cilindro? $2010.61\ cm^3$
- ¿Qué expresión algebraica permite encontrar esta cantidad?
- Describan la secuencia de operaciones que realizaron. Se multiplica el valor de pi por 8 elevado al cuadrado y esto por 10 (la altura).
- ¿Cuánto mide el volumen del cono? $670.2\ cm^3$
- Analizando estos resultados, ¿qué expresión algebraica se puede plantear para encontrar directamente el volumen del cono? $V = \pi(8)^2(10)$
- Por lo tanto, ¿qué expresión algebraica permite encontrar el volumen de cualquier cono?
  $V = \pi(r)^2(h)$ o bien $V = \pi r^2 h$
- ¿Cómo se lee en lenguaje común esta expresión? Un tercio del producto de Pi por el cuadrado del radio multiplicado por la altura.
- ¿De qué manera se puede comprobar que esta expresión es correcta? Se puede comprobar calculando el radio o la altura a partir del volumen y uno de estos datos.

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen cuál es la importancia de saber leer correctamente las fórmulas para calcular el volumen del cilindro y del cono al momento de desarrollar el algoritmo que permite encontrar el volumen de cada uno.

Qué observar

Para estas figuras es importante que el alumno maneje correctamente la jerarquía de operaciones y utilice de manera adecuada el número pi. Ponga atención en esto al momento de trabajar con la actividad y considere las posibles diferencias en el resultado si los alumnos están utilizando calculadora para resolverla, esto es porque si toman el valor de pi como 3.14 o lo toman con la calculadora el resultado puede variar ligeramente.

Cómo enriquecer la actividad

Si puede construir o conseguir figuras similares, realice este experimento con semillas, granos, e incluso si las condiciones lo permiten, con agua, siempre bajo su supervisión.

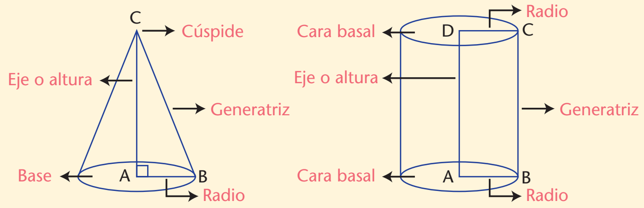
Curiosidades, acertijos y más

Los principios de la geometría eran conocimientos empíricos acerca de las longitudes, ángulos, áreas y volúmenes, que fueron desarrollados para satisfacer las necesidades en topografía, construcción, astronomía y diversas artesanías.

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

Para leer más



Para tener en cuenta

Cuando se quiere conocer el volumen de un cilindro se lleva a cabo el mismo procedimiento que se usa en un prisma, se calcula el área de la base y se multiplica por la altura, la diferencia es que para obtener el área de un círculo se utiliza la fórmula: $A = \pi r^2$ y al multiplicar por la altura queda $A = \pi r^2 h$

Cuando se quiere conocer el volumen de un cono se utiliza la fórmula: $A = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ya que, al igual que una pirámide tiene la tercera parte del volumen de un prisma, un cono tiene la tercera parte del volumen de un cilindro.

Qué observar

Permita que el alumno trabaje con libertad y de manera independiente. Asegúrese de que el alumno utilice sus propios recursos para resolver la situación.

Cómo enriquecer la actividad

Motive a los alumnos para que den su mejor esfuerzo y observe que son capaces de resolver la actividad con seguridad y confianza en sí mismos.

LO QUE APRENDÍ

1. Analiza las siguientes situaciones y contesta las preguntas.

 a) En la oficina de Gabriela y Mariana les gusta tener una garrafa para jugos y vasos de papel, compran paquetes de vasos en forma de cono y tienen una garrafa de cristal. Analiza las imágenes y contesta las preguntas.

- ¿Cuál es el volumen de los vasos de papel? 128.28 cm^3
- ¿Qué expresión algebraica permite encontrar esta cantidad? $V = \frac{1}{3}\pi(3.5)^2(10)$

Transversalidad

Ciencias 2, Física

En el laboratorio escolar hay balanzas que se utilizan para medir masa, muchas de éstas contiene pesos en forma cilíndrica. Solicite a los alumnos que pidan permiso al profesor de Ciencias 2, para visitarlo y que calculen el volumen de estas pesas.

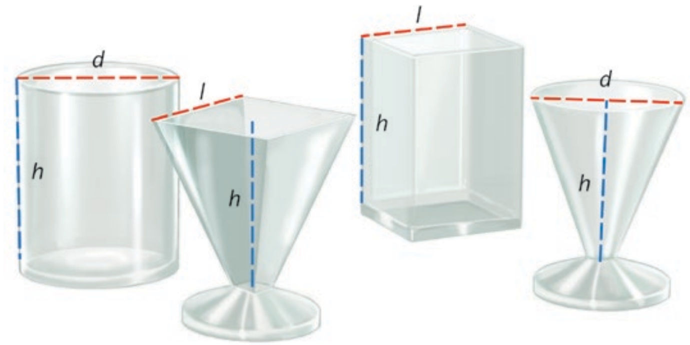
Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

- ¿Cuál es el volumen de la garrafa para el jugo? 15833 cm^3
- ¿Qué expresión algebraica planteaste para encontrar esta cantidad? $V = \pi (12)^2 (35)$
- Aproximadamente, ¿cuántos vasos se pueden llenar si la garrafa estuviera llena en su totalidad? 123
- ¿De qué manera llegaste a este resultado? Dividiendo el volumen de la garrafa entre el volumen de los conos de papel.

b) Viviana es mamá de María y acaba de comprar moldes para hacer velas de cera, todos los moldes tienen 12 cm de altura y el diámetro de los que tienen una base circular y los lados de los que tienen una base cuadrada es de 6 cm. Analiza la imagen y contesta las preguntas.

- ¿Qué volumen tiene el molde cilíndrico? $V = 339.29$ cm^3



- ¿Cuál es el volumen del molde en forma de prisma cuadrangular? 432 cm^3
- ¿Qué volumen tiene el molde en forma de pirámide cuadrangular? 144 cm^3
- ¿Cuál es el volumen del molde cónico? 113.09 cm^3
- ¿Cuál fue la estrategia que usaste para calcular la capacidad de cada molde?
  Aplicando la fórmula del volumen para cada uno de los sólidos dados.
- ¿De qué manera es posible comprobar que los resultados son correctos?
  Ya que son figuras con las mismas dimensiones es posible comprobarlo, porque las del cono y la pirámide deben medir la tercera parte que el cilindro y el prisma respectivamente.
- ¿Es posible comprobar la relación que hay entre el volumen de la pirámide y del prisma con la que hay entre el cono y el cilindro? Sí
  Explica tu respuesta.
  Se puede comprobar físicamente y aritméticamente. Si se llena un prisma con algún material, la tercera parte de este cabría en una pirámide con las mismas dimensiones. O bien haciendo operaciones.

2. Contrasta tus resultados con los de tus compañeros, y con la ayuda del profesor elabora una conclusión acerca de este contenido que sintetice cuál es el procedimiento que consideras más adecuado para calcular el volumen de un cilindro y una pirámide.

Reflexión

"Quien volviendo a hacer el camino viejo aprende el nuevo, puede considerarse un maestro".

Confucio.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Permita que los alumnos obtengan sus propias conclusiones acerca de cómo afecta el volumen del cilindro y el cono el hecho de que se aumenten o disminuyan sus dimensiones. El trabajo en equipo permitirá el análisis de sus observaciones y justificar los resultados. Vigile que la actividad se desarrolla en orden y en tiempo; mientras tanto puede apoyarlos durante el proceso.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que analicen las situaciones, una por una en su cuaderno; esto tiene la intención de enfocarse en cada uno de los procesos. Sería muy interesante que ellos mismos elaboren la conclusión sobre lo que ocurre con el volumen en estos dos sólidos.

Recursos y materiales

En la página *Encicloabierta* encontrará un simulador que le permitirá trabajar este tema con los alumnos.

http://recursos.encicloabierta.org/telesecundaria/3tls/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b05_t03_s01_descartes/index.html

Matemáticas 3. Por competencias

USA LAS TIC

Visita la página http://es.ncalculators.com/area-volume/cylinder-calculadora.htm (Consultada el 27 de abril de 2013, a las 14:00 horas), para conocer una calculadora de medidas de un cilindro, y http://es.ncalculators.com/area-volume/cone-calculadora.htm (Consultada el 27 de abril de 2013, a las 14:10 horas) para conocer una calculadora de medidas de un cono.

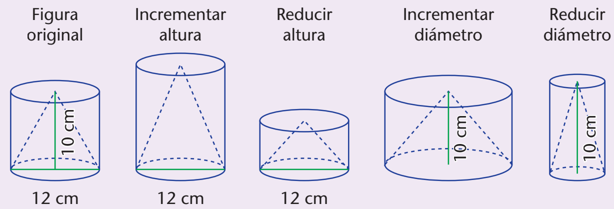
Las puedes utilizar para comprobar tus resultados, analizar tus hipótesis y resolver tus dudas. Después de tu visita, comenta con tu profesor, ¿cuál es la utilidad práctica en la vida cotidiana de una herramienta electrónica como ésta?

Nota: las unidades que usa son pulgadas, pero puedes cambiarla fácilmente a centímetros, toma en cuenta esta recomendación.

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos, analicen la siguiente imagen y lleven a cabo el reto matemático planteado.

   El propósito de este reto es comparar cuál es la relación entre el volumen del cono y del cilindro cuando se incrementa o reduce alguna de sus dimensiones.



   a) Tomen como referencia las indicaciones de cada imagen, aumenten o reduzcan la cantidad que consideren adecuada para poder investigar la forma en que afecta al volumen de cada figura, luego respondan las preguntas.

   - ¿Qué ocurre con el volumen del cilindro cuando alguna de las dimensiones aumenta? El volumen aumenta
   - ¿Y para el cono? El volumen aumenta
   - Para el cilindro, ¿ocurre lo mismo si disminuye? El volumen disminuye ¿Por qué ocurre esto?
   - ¿Qué ocurre si se reduce para el cono? El volumen reduce
   - Si se incrementa una unidad a la altura del cilindro, ¿el incremento en el volumen es igual que si se incrementa una unidad en el diámetro de la base? No
   - ¿Pasa lo mismo con el cono? No

     Expliquen su respuesta. El incremento de volumen es mayor si se incrementa la base a que si se incrementa la altura.

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen, tanto para el cilindro como para el cono, ¿cuál es la relación que hay entre el incremento o reducción de alguna de sus dimensiones con el volumen que contienen?

Bitácora pedagógica

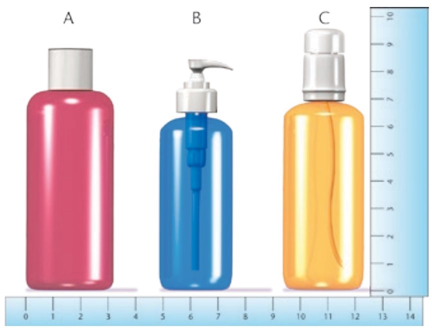
BLOQUE 5

Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Contenido 4	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

ACUÉRDATE DE...

1. Lean con atención las siguientes situaciones y respondan las preguntas que se plantean.

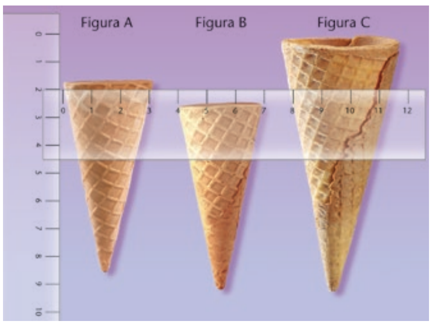
a) Ana tiene un negocio de aceites naturales, para envasarlos utiliza distintos tipos de frascos, analicen la imagen mostrada y diseñen una estrategia que les permita estimar el volumen aproximado de cada uno de los envases mostrados.



- ¿Cuál es la capacidad del envase A? $V = 87.96\ cm^3$
- ¿Cuál es la capacidad del envase B? $V = 29.45\ cm^3$
- ¿Cuál es la capacidad del envase C? $V = 45.94\ cm^3$
- ¿En qué unidades expresaron los resultados? En cm^3
- Si recibe el aceite en contenedores de 5 litros aproximadamente, ¿cuántos frascos del tipo A puede llenar? 55 completos ¿Cuántos del tipo B? 169 completos ¿Cuántos del tipo C? 108 completos
- ¿Hubo una diferencia significativa entre estas cantidades? Sí

  ¿Por qué ocurrió esto? Por la relación entre la cantidad de aceite y la capacidad de los recipientes.

b) El tío de Juan vende helados de frutas, diseñen una estrategia para encontrar el volumen de los conos.



- Escriban el volumen de los conos:

  A = $V = 15.31\ cm^3$

  B = $V = 15.31\ cm^3$

  C = $V = 37.69\ cm^3$
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar estas medidas? Se toma la medida aproximada. según las reglas que se muestran.
- ¿En qué unidades expresaron los resultados? 247

2. Contrasten sus resultados con los de equipos, y con la asesoría del profesor determinen la importancia de la observación y del cálculo mental al momento de realizar una estimación de valores.

Qué observar

Cuando se hacen estimaciones, es muy normal que los alumnos obtengan resultados diferentes; sin embargo, estos no deben tener una variación muy grande. Verifique que los alumnos comprenden esto y toman como base las reglas mostradas para estimar las dimensiones.

Cómo enriquecer la actividad

Puede tomar algunos recipientes similares que tengan a la mano, o que sean fáciles de conseguir, y con su regla estimar sus dimensiones y calcular su volumen, al ser estas medidas reales le permite al alumno comprender la importancia que tienen, reafirmar sus conocimientos y que crezca la confianza en su análisis y planteamiento de solución.

Bitácora pedagógica

Recursos y materiales

En la página de *Encicloabierta* encontrará un simulador que le permitirá trabajar con sus alumnos este tema.

http://recursos.encicloabierta.org/telesecundaria/3tls/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b05_t03_s01_descartes/index.html

Qué observar

Permita que los equipos analicen las situaciones con tiempo suficiente. Observe que comprenden la idea y que plantean hipótesis de lo que ocurre con el volumen del cilindro y de la esfera si se cambian de posición, como se muestra en la imagen.

Cómo enriquecer la actividad

Pida a los alumnos que de manera ordenada, y en limpio, presenten en su cuaderno las operaciones realizadas y una conclusión explicando qué es lo que ocurre con el volumen del cilindro y del cono cuando se toman como altura distintos lados del triángulo o rectángulo que los genera.

Cambiando números

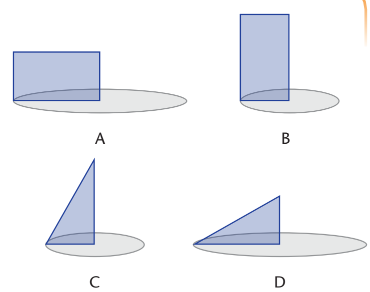
Comente a los alumnos que la indicación debe decir:

Suponiendo que uno de los cilindros tiene un volumen de 785.7 y su radio es de 5 cm, ¿cuánto debe medir de altura?

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO **Actividad 4.1**

1. Analicen la imagen mostrada y contesten las preguntas.
   a) En la figura A se tomó como eje el ancho del rectángulo.
   b) En la figura B se tomó como eje el largo para crear dos cilindros.
   c) Para el triángulo C se tomó como eje el cateto mayor.
   d) El triángulo D se tomó como eje el cateto menor.



- ¿Cuál de los dos cilindros formados consideran que su base tiene mayor superficie? A

  Justifiquen su respuesta. Porque tiene un radio mayor.
- En cuanto a los triángulos, ¿cuál de los conos formados tiene mayor superficie su base? D

  ¿Por qué ocurre esto? Porque tiene un radio mayor.
- Si al ancho del rectángulo le asignan una medida de 5 cm y a su largo de 8 cm, ¿cuál es el volumen del cilindro de la figura A? $V = 1005.3\ cm^3$ ¿Cuál es el volumen del cilindro de la figura B? $V = 628.3\ cm^3$
- ¿Qué conclusión pueden obtener con base en estos cálculos?

  No tienen el mismo incremento de volumen debido a la diferencia en los radios.
- Si ahora asignamos el valor de 5 cm al cateto menor del triángulo y 8 cm al cateto mayor, ¿cuál es el volumen del cono de la figura C? $V = 209.4\ cm^3$ ¿Cuál es el volumen del cono de la figura D? $V = 335.1\ cm^3$
- ¿Qué conclusión pueden obtener con base en estos resultados?

  Ocurre lo mismo que con el cilindro, la medida del radio afecta la relación con el volumen.
- Suponiendo que uno de los cilindros tiene un volumen de 785.7 cm^3 y su altura mide 5 cm, ¿cuánto debe medir de altura? h = 10 cm
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar este resultado?

  De la fórmula se despeja la altura para obtener su valor. $h = \frac{\frac{785.7}{\pi}}{25}$
- ¿Qué operación plantearon para encontrar el resultado?
- ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto?

  Se puede calcular nuevamente el volumen con este dato y verificar si es igual.
- Entonces, ¿de qué cilindro de la ilustración se trata, del A o del B? De ninguno de ellos.
- Suponiendo que un cono mide 261.9 cm^3 y su radio mide 5 cm, ¿cuál es la altura del cono?

  9.9 cm
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar este resultado?

  De la fórmula del volumen del cono se despeja el valor de la altura. $h = \frac{\frac{\frac{261.9}{\frac{1}{3}}}{\pi}}{25}$
- ¿Qué operación plantearon para encontrar este resultado?
- ¿Cómo pueden saber que su respuesta es correcta?

  Se puede calcular nuevamente el volumen con este dato y verificar si es igual.

2. Comparen sus resultados, operaciones y estrategias con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor establezcan una hipótesis que explique de qué manera se calcula alguna de las dimensiones del cono y del cilindro cuando ya se conoce su volumen.

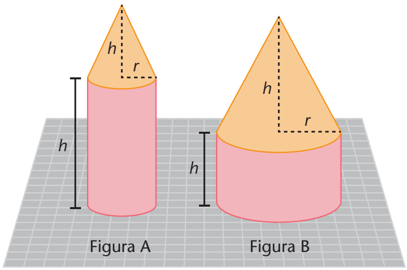
Bitácora pedagógica

PRACTÍCALO

Actividad 4.2

1. Lee la situación planteada, analiza la imagen y contesta las preguntas.

   a) En la imagen se pueden ver dos figuras compuestas, la altura del cilindro de la figura A es igual a la altura del cono de la figura B, y la altura del cono de la figura A es igual a la altura del cilindro de la figura B.



   - ¿Cómo son los radios entre A y B, iguales o distintos? El radio de A es menor al de B.

     Justifica tu respuesta. Esto se puede deducir por apreciación.

   - ¿Cuál de las dos figuras compuestas consideras que tiene mayor volumen? La figura B

     ¿Por qué? Porque los radios del cilindro y del cono son mayores que los de la figura A.

   - Si la altura del cilindro de la figura A es de 8 cm, la altura de su cono es de 3 cm y el radio común es de 1.5 cm, ¿cuál es el volumen total de la figura A? $V = 63.6$ cm^3
   - ¿De qué manera encontraste este resultado? Se calcula el volumen de cada figura y luego se suman.
   - ¿Qué operaciones tuviste que realizar para encontrar el resultado? Solo las de cada fórmula y la suma final.
   - Si el radio de la figura B mide 6 cm, ¿cuál es el volumen total? $V = 640.88$ cm^3
   - ¿Qué estrategia empleaste para encontrar el resultado? Se calcula el volumen del cilindro y del cono, y luego se suman.
   - ¿Qué operaciones tuviste que hacer para encontrar el resultado? Solo las de cada fórmula y la suma final.
   - Si en la figura A la altura del cilindro y del cono se conservan igual, pero se desea que el volumen total sea 707.14 cm^3, ¿cuánto debe medir el radio? 5 cm
   - ¿Qué estrategia empleaste para resolver esta situación? Se puede aproximar de forma sencilla tomando a pi como 3.14 y haciendo ambos cálculos de volumen en una sola operación.
   - ¿Qué operación planteaste para encontrar el resultado? Se resolvió al mismo tiempo el volumen de ambas figuras.
   - ¿Cómo puedes comprobar que tu resultado es correcto? Como ya se conoce el volumen, se puede calcular nuevamente con el radio obtenido.
   - Si en la figura B se conserva el radio común y la altura del cilindro, ¿cuánto debe medir la altura del cono para que el volumen total sea de 791.99 cm^3? 18 cm
   - ¿Qué estrategia utilizaste para encontrar esta medida? Se realizan ambas operaciones al mismo tiempo igualando a 791.99.
   - ¿Qué operación tuviste que plantear? Las indicadas según las dos fórmulas.
   - ¿Cómo puedes comprobar que este resultado es correcto? Calculando nuevamente el volumen con la nueva altura, debe coincidir con el volumen conocido.

2. Compara tus resultados con los de tus compañeros, y con la ayuda del profesor determina la forma correcta de encontrar una de las dimensiones de un cono y un cilindro en una figura compuesta.

Qué observar

Verifique que los alumnos comprenden el contexto de la situación y la idea de la actividad, posteriormente vigile que son capaces de relacionar los datos dados y contestar las preguntas. Como la actividad es individual, tal vez sea necesario que esté al pendiente de las dudas que surjan.

Cómo enriquecer la actividad

Si lo considera prudente, se puede resolver esta actividad durante la clase. Tome en cuenta la participación de los alumnos y verifique que todas las respuestas planteadas tengan una justificación adecuada.

Curiosidades, acertijos y más

Una jarra contiene un litro de agua y una botella un litro de jugo de limón. Un vaso de jugo (250 ml) se vacía en la jarra, revolviéndose hasta que se mezclan perfectamente. Después, se llena el mismo vaso con la mezcla de la jarra, vertiendo su jugo en la botella de jugo. ¿Qué hay más, agua en la botella o jugo en la jarra?

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta actividad es para consolidar los procedimientos, y a usted le permitirá evaluar el grado de avance en cuanto al planteamiento de soluciones. Vigile el desarrollo de la actividad poniendo especial atención en la actitud y seguridad que demuestra el alumno, así como la colaboración y trabajo en pareja.

Cómo enriquecer la actividad

Puede utilizar situaciones similares de la vida cotidiana, e incluso tratar de utilizar objetos de uso común para realizar cálculos reales; por ejemplo, puede tomar una pequeña jarra y vasos de papel verdaderos, tomen las medidas necesarias, realicen los cálculos y comprueben que efectivamente coincide con la cantidad de vasos que se pueden llenar, tome las precauciones pertinentes si va a realizar esta actividad.

Transversalidad

Educación física

Durante la realización de los ejercicios de esta materia, es muy común que el profesor utilice conos para sus actividades con los alumnos. Pida que soliciten al profesor de Educación física para que les proporcione un cono y calculen su volumen.

PRACTÍCALO — Actividad 4.3

1. Analicen las siguientes situaciones y realicen lo que se indica.

   a) En casa de Ramiro van a hacer una fiesta y prepararon dos garrafas de 20 litros, una con agua de horchata y otra con agua de Jamaica. Si una persona desea agua puede tomar un cono de papel; éstos miden 4 cm de radio y 9 cm de altura. Diseñen una estrategia que les permita saber la cantidad de vasos que pueden llenar con esa cantidad de agua.

   - Elaboren en su cuaderno un esquema de esta situación.
   - ¿Cuántos vasos se pueden llenar? 132 vasos completos
   - ¿Qué estrategia emplearon para encontrar este resultado? Se convierten los litros en cm^3 y se calcula el volumen de cada cono, luego se dividen estas cantidades.
   - ¿Qué operación tuvieron que plantear para resolver esta situación? $\mathit{Num.\ de\ vasos} = \frac{20\,000\ cm^3}{\frac{1}{3}\pi\,(4)^2\,(9)}$
   - ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto? Multiplicando el número de vasos por el volumen de cada uno, debe dar un número aproximado a 20 000 cm^3.

   b) En la unidad habitacional donde vive Marco se quedaron sin servicio de agua, algunos vecinos contrataron una pipa con 8000 litros para repartirla entre ellos. Se sabe que los tinacos de las casas son iguales y miden 1.43 m de diámetro y 1.05 m de altura. Diseñen una estrategia que permita conocer cuántas casas podrán llenar su tinaco con el contenido de una pipa.

   - Realicen en su cuaderno un esquema de esta situación.
   - ¿Cuántas casas recibirán agua? 4 casas con el tinaco completo.
   - ¿Qué estrategia emplearon para encontrar este resultado? Los litros se convierten a cm^3 y se calcula el volumen de cada tinaco, también en cm^3, de esta manera se puede dividir para conocer el número de casas.
   - ¿Qué operación tuvieron que plantear para resolver esta situación? Num. de casas $= \frac{8\,000\,000}{\pi\,(71.5)^2(105)}$ Tomando como base las unidades en cm.
   - ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto? Multiplicando el número de casas por la capacidad de su tinaco, debe dar un aproximado a los 8 000 litros de la pipa.

2. Contrasten sus resultados y estrategias con los de sus compañeros y con la asesoría del profesor determinen el procedimiento para encontrar el volumen de un cono y un cilindro cuando hay que hacer una conversión de unidades.

PRACTÍCALO — Actividad 4.4

1. A continuación se mencionarán tres condiciones, con base en cada una, elaboren un problema que se pueda modelar, según los datos dados y respondan las preguntas.

   a) El radio de un cono y un cilindro miden 7 cm y la altura de ambos mide 12 cm.

   - Escriban la situación. Se espera que el alumno diseñe una situación, por ejemplo, la creación de un molde donde se tenga que obtener la diferencia entre el volumen de ambas figuras.
   - Registren la operación que modela esta situación. RM: Para el cilindro $V = \pi\,(7)^2\,(12)$, para el cono $V = \frac{1}{3}\,\pi\,(7)^2\,(12)$

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

- ¿Cuál es el valor del volumen del cilindro? $V = 1847.25$ cm^3
  ¿Cuál es el valor del volumen del cono? $V = 615.75$ cm^3
- ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto?
  Verificando que el volumen del cono sea la tercera parte del volumen del cilindro.

b) El volumen de un cilindro es de 4.78 m^3 y su radio mide 1.3 m.

- Escriban la situación.
  Verificando que el volumen del cono sea la tercera parte del volumen del cilindro.
- Registren la operación que modela esta situación.
  RM El alumno podrá indicar diversas situaciones.
- ¿Cuál es el valor de la altura del cilindro? RM Depende del alumno la situación que desarrolle.
- ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto?
  0.9 m

c) El volumen de un cono es 6.36 m^3 y su altura mide 2.7 m.

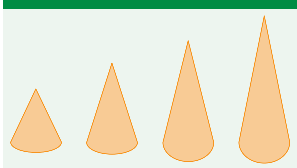
- Escriban la situación. Calculando el volumen a partir del radio y la altura.
- Registren la operación que modela esta situación.
  Depende del alumno la situación que elija para el volumen.
- ¿Cuál es el valor del radio del cono? 1.49 m
- ¿Cómo pueden comprobar que su resultado es correcto?
  Calculando el volumen a partir del radio y la altura.

2. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen en qué influye el contexto de una situación que involucra trabajo con cilindros y conos al momento de resolverla, y de qué manera pueden comprobar que cada situación planteada contiene todos los elementos necesarios para resolverla de manera correcta.

PRACTÍCALO **Actividad 4.5**

Analicen la situación planteada, completen las tablas y contesten las preguntas que les ayudarán a formalizar algebraicamente el cálculo del volumen de un cilindro y un cono, así como, a establecer la relación que tiene con respecto al radio y la altura.

a)

Figura	Radio	Altura	Volumen	Relación entre la altura y el volumen
 1 2 3 4	1	2	2.09u^3	1.04
	1	3	3.14u^3	1.04
	1	4	4.18u3	1.04
	1	5	5.23u^3	1.04
Conclusión	La relación es una constante			

Qué observar

En esta actividad la creatividad, la lógica y la deducción son importantes, observe que los alumnos comprenden el propósito de la actividad, dé el tiempo necesario para realizarla y procure orientarlos para resolver las dudas que se presenten.

Cómo enriquecer la actividad

Es importante compartir estas experiencias, pida que algunos de los alumnos expliquen cómo diseñaron sus situaciones, qué fue lo que consideraron y cómo plantearon las operaciones que realizaron, esto con la intención de enriquecer la actividad con la experiencia de cada uno. Puede participar activamente, sugiriendo algunas ideas para mejorar los planteamientos, o bien de cómo realizarlos de una manera más adecuada.

Bitácora pedagógica

Recursos y materiales

En la página de Ditutor encontrara ejercicios para complementar este tema.

http://www.ditutor.com/geometria_espacio/volumen_cono.html

http://www.ditutor.com/geometria_espacio/volumen_cilindro.html

Qué observar

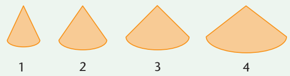
Esta actividad está diseñada para que los alumnos analicen con detalle lo que ocurre con el volumen del cono y del cilindro cuando se cambia alguna de sus dimensiones. Permita que la realicen con el tiempo necesario y que obtengan sus propias conclusiones, procurando que justifiquen sus respuestas.

Cómo enriquecer la actividad

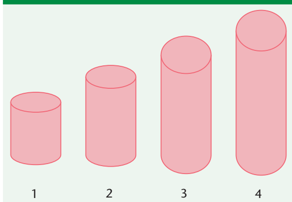
Compare los resultados de esta actividad con los que se realizaron anteriormente, esto le permitirá al alumno contrastar las respuestas y reafirmar sus conclusiones. Pida a los alumnos que lleven un registro ordenado de las operaciones y que compartan sus resultados y conclusiones con sus compañeros.

Matemáticas 3. Por competencias

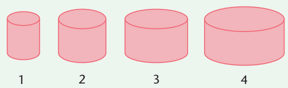
b)

Figura	Radio	Altura	Volumen	Relación entre la altura y el volumen
	1	2	2.09	2.09
	1.5	2	4.71	3.14
	2	2	8.37	4.18
	2.5	2	13.08	5.32
Conclusión	La relación es una constante.			

c)

Figura	Radio	Altura	Volumen	Relación entre la altura y el volumen
	1	2	6.28	3.14
	1	3	9.42	3.14
	1	4	12.56	3.14
	1	5	15.7	3.14
Conclusión	La relación es una constante.			

d)

Figura	Radio	Altura	Volumen	Relación entre la altura y el volumen
	1	2	6.28	
	1.5	2	9.42	
	2	2	11.56	
	2.5	2	15.68	
Conclusión	No es una relación constante.			

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen de un cono al cambiar su altura con base en el cono del inciso a? Incremento de volumen constante.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen de un cono al cambiar su radio con base en el cono del inciso b?
- ¿ Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen de un cilindro al cambiar la altura del inciso c? Incremento de volumen constante.

2. Contrasten sus resultados y conclusiones con los de sus compañeros y con la supervisión del profesor elaboren una conclusión que explique de manera breve si son proporcionales el crecimiento del volumen con el del radio o la altura para estos dos sólidos de revolución.

Curiosidades, acertijos y más

El volumen de un sonido se mide en decibeles. Los sonidos mayores a 90 decibelios producen dolor, pero por encima de los 130 decibeles puede llegar a causar sordera.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

Para tener en cuenta

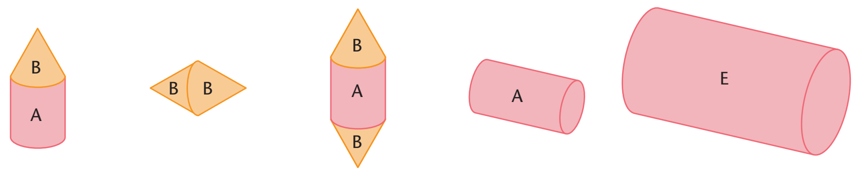
Cuando se incrementa la altura en un cono o un cilindro, pero el área de su base permanece igual, el incremento de su volumen es proporcional y no lo es cuando se incrementa el radio de la base y la altura permanece constante, en este caso, la variación es cuadrática.

Es importante saber que un decímetro cúbico (dm^3) equivale a un litro (ℓ) a partir de este dato es posible calcular cualquier equivalencia entre unidades.

LO QUE APRENDÍ

1. Diseña una estrategia para calcular el volumen de estas piezas, sabiendo que los sólidos que tienen las mismas letras son idénticos. El diámetro de A y B es 2.5 cm, y su altura es de 3.2 cm, el sólido E tiene sus dimensiones exactamente al doble de A.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4



a) Completa la tabla con los valores que obtuviste.

Figura	Volumen total
1	20.93 cm^3
2	10.46 cm^3
3	26.16 cm^3
4	141.3 cm^3 (La suma del volumen de ambos cilindros)

- Describe la estrategia que utilizaste pare encontrar estos valores. Se calcula un cilindro y un cono, con eso es posible obtener todas las medidas de volumen excepto la figura E.
- ¿Cuántas operaciones tuviste que efectuar para encontrar todos los resultados? (La suma del volumen de ambos cilindros).
- ¿Consideras que realizaste sólo las operaciones necesarias? La formula se usa tres veces, una para el cilindro pequeño otra para el cono y otra para el cilindro grande.
  Explica tu respuesta. A fin de cuentas son figuras compuestas, por lo que es factible calcular las medidas necesarias y luego sumarlas.
- ¿El volumen del cilindro E tuvo el doble del volumen del cilindro A? No
  ¿Por qué ocurrió esto? Porque la relación entre el volumen de ambos no es proporcional.

2. Contrasta tus resultados con los obtenidos por tus compañeros y con la asesoría del profesor determina, ¿qué elementos necesitas dominar para tener la seguridad de que puedes resolver cualquier situación que tenga que ver con el cálculo del volumen de un cono o un cilindro?

Qué observar

Cuando se trabaja con figuras compuestas hay medidas "ocultas", que es necesario tener en cuenta. Observe cómo es el desempeño del alumno ante esta situación, pero permita que trabaje valiéndose de sus propios medios, motívelo a que busque respuesta a sus posibles dudas; si es necesario orientarlo, haga preguntas reflexivas.

Cómo enriquecer la actividad

Al finalizar la actividad, coordine un análisis grupal. Pida que desde su lugar participen para dar solución y argumente junto con ellos las respuestas que se vallan aclarando. Es importante generar un ambiente de respeto, donde el alumno se sienta con la confianza de participar, incluso si llega a cometer algún error en el procedimiento, de esta manera podrá recibir ayuda del profesor y del grupo al mismo tiempo.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Estos retos contienen un nivel de dificultad un poco más alto que los anteriores; dé el tiempo necesario para realizarlo, pero verifique que los planteamientos que realicen sean lógicos y acorde a las condiciones dadas. Apoye a los alumnos en cuanto a las dudas que se generen y motívelos para desarrollar su capacidad creativa.

Cómo enriquecer la actividad

Después de concluir la actividad, seleccione algunos planteamientos que considere adecuados y compártalos frente al grupo. Es conveniente que usted guíe el análisis, y por medio de preguntas, motive la participación de los alumnos; esto con la intención de que comparen su trabajo con el de sus compañeros y analicen sus similitudes y diferencias.

Transversalidad

Ciencias 1, Biología

Anteriormente se le había indicado al alumno que visitara el laboratorio para revisar los materiales que tienen aspecto cilíndrico y cónico, ahora solicite que calculen el volumen de tres instrumentos de medición de volumen y líquidos, y calculen matemáticamente su volumen.

Matemáticas 3. Por competencias

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos y juntos desarrollen una situación en la que utilicen un cono y un cilindro, la condición es que primero determinen el volumen de cada uno, sin calcular antes las medidas del radio o la altura.
   - Escriban la situación que plantearon.

     Depende del alumno, se espera un planteamiento lógico y adecuado.
   - Elaboren un esquema que modele la situación.

     Depende del alumno, el esquema debe ilustrar todos los elementos de la situación planteada.
   - ¿Cómo resolvieron la situación al asignar los valores del radio y la altura?

     Depende del alumno, las unidades deben ser claras y lógicas con la situación.
   - ¿Qué operaciones plantearon?

     Depende del alumno, debe utilizar las fórmulas correctamente.
   - ¿De qué manera pueden comprobar que sus planteamientos y operaciones son congruentes entre sí y están bien desarrollados?

     Depende del alumno, debe demostrar que sus resultados son correctos.
2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con la asesoría del profesor determinen los conocimientos y habilidades que se necesitan para poder plantear y resolver con coherencia una situación que involucre el cálculo del volumen o de cualquier componente de las fórmulas de un cono o cilindro.

USA LAS TIC

Visita la página http://www.thatquiz.org/es-4/matematicas/geometria/ (Consultada el día 27 de abril de 2013, a las 15:00 horas), allí encontrarás la posibilidad de practicar tus algoritmos para reafirmar tus procedimientos, únicamente debes seleccionar las opciones “cono y cilindro”, además, puedes cambiar el nivel de dificultad para que el reto sea aún mayor, registra tus opiniones y comentarios para que después de visitar la página, junto con algunos de tus compañeros, puedan comentar en clase acerca de este recurso, y con la ayuda del profesor determinar la ventaja de contar con este tipo de herramientas en la vida cotidiana.

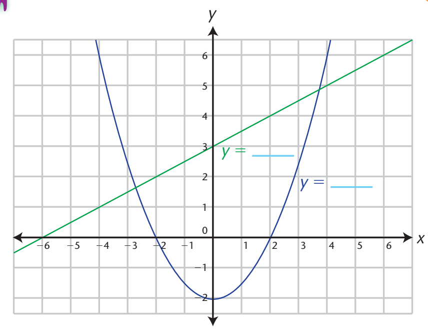
Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Proporcionalidad y funciones
Contenido 5	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

ACUÉRDATE DE...

1. En la gráfica mostrada se encuentran representadas dos líneas, ¿recuerdan cómo encontrar la expresión algebraica que modela estas líneas?



   a) Diseñen una estrategia que les permita encontrar la expresión de cada línea.

   - ¿Qué expresión algebraica representa la línea verde? $y = \frac{1}{2}x + 3$
   - ¿Qué expresión algebraica representa la línea azul? $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$
   - ¿Qué nombre recibe este tipo de líneas? Parábolas
   - ¿Cuál estrategia decidieron utilizar para encontrar la expresión de la línea verde? Se espera que el alumno establezca la relación por medio de las coordenadas de la recta.
   - ¿Y para hallar la de la línea azul? Se espera que el alumno establezca la relación por medio de las coordenadas de la parábola.
   - ¿Cómo pueden comprobar que la expresión que plantearon para cada una es correcta? Tabulando y graficando la expresión obtenida.

   b) Con base en la información de la gráfica, completen la tabla.

Recta	x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
	y	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5

Curva	x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
	y	6	2	0	− 1.5	− 2	− 1.5	0	2	6

   - ¿Qué diferencia se observa entre los valores de *y* para cada línea? En la primera los valores crecen de manera constante, y en la segunda son simétricos con respecto al cero en *x*.
   - Escriban en su cuaderno las operaciones que realizaron para encontrar la expresión algebraica de la recta.
   - Escriban en su cuaderno las operaciones que realizaron para encontrar la expresión algebraica de la curva.
   - Expliquen, ¿de qué manera se relacionan la expresión algebraica, la tabla y la gráfica? La expresión determina los valores de "y" en la tabla y ésta a su vez determina las coordenadas de la gráfica.

2. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros, y con la asesoría del profesor determinen para cada caso, ¿cómo se obtiene una expresión algebraica a partir de la gráfica que la representa?

Qué observar

En esta actividad se manejan dos expresiones, una de primer grado y una de segundo grado. Es importante que el alumno rescate los conocimientos previos de ambos temas para resolver esta actividad. Dé el tiempo necesario, considerando que tienen que manejar muchos datos.

Cómo enriquecer la actividad

El registro de operaciones que se realiza en el cuaderno es un excelente complemento de esta actividad, tómelo en cuenta al momento de evaluar. Puede enriquecer la actividad si a partir de las expresiones obtenidas construye las tablas y las gráficas, esto permitirá que todo el grupo compruebe sus resultados y reafirme sus procedimientos.

Recursos y materiales

En la página *Dav.sceu* encontrará información que le permitirá introducir al alumno a este tema.

http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/lloret/aplicaciones.htm

http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/lloret/funcion_cuadratica.htm

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

PRACTÍCALO **Actividad 5.1**

1. Con base en las conclusiones de la actividad anterior, analicen las situaciones planteadas y respondan las preguntas.
   a) En su trabajo, Ramiro entrega reportes cada 4 días, y cada 5 días entrega un informe, el último reporte lo entregó el día 7 de este mes, junto con su primer informe.
   - ¿Cuál es la secuencia de días en los que entregará sus siguientes reportes hasta el nuevo informe? 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31
   - ¿Qué expresión algebraica modela la secuencia de días en los que Ramiro entrega sus informes? $y = 4x + 3$
   - ¿De qué tipo de expresión se trata? De una expresión de primer grado.
   - ¿De qué manera determinaron esta expresión? Utilizando la fórmula para encontrar la expresión algebraica de una sucesión.
   - ¿Cómo pueden comprobar que la expresión corresponde a las secuencias de los días de entrega? Tabulando la expresión algebraica, los términos de "y" deben corresponder a la sucesión.

   b) Roberto tiene un negocio de lonas impresas, esta semana están en promoción las lonas que miden 1, 4, 9, 16, 25… metros cuadrados.
   - Si todas son semejantes, ¿qué forma tienen? Cuadradas
   - ¿Qué expresión algebraica representa la secuencia de las dimensiones de las lonas? $y = x^2$
   - ¿De qué manera determinaron esta expresión? Se trata de los cuadrados de los números naturales
   - ¿De qué tipo de expresión se trata? Cuadrática o de segundo grado.
   - Escriban la operación que plantearon para modelar y resolver esta situación. $y = x^2$
   - ¿Cómo pueden comprobar que la expresión corresponde a la secuencia? Tabulando la expresión, los valores de "y" deben corresponder a la secuencia dada.
2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen: ¿cómo se relacionan los conjuntos de datos entre sí?

PRACTÍCALO **Actividad 5.2**

1. Analicen cada situación planteada y contesten las preguntas.
   a) En la clase de física, el profesor le pidió a Luis que tomara una pelota y que subiera hasta la parte más alta del edificio escolar y lo dejara caer libremente; se sabe que la gravedad tiene una aceleración de 9.8 $\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$ y que la altura a la que está Luis es de 18 m.
   - ¿Cuánto tiempo tardará en llegar la pelota al suelo? 1.34 seg
   - ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar el resultado? Despejando t de la ecuación $d = gt^2$
   - ¿Qué expresión algebraica modela esta situación? $t = \sqrt{\frac{d}{g}}$
   - ¿De qué tipo de expresión se trata? Se trata de una curva para los valores positivos.
   - Construyan una tabla en su cuaderno, que represente el tiempo y la distancia que recorrió la pelota al caer.
   - En su cuaderno elaboren una gráfica con base en la tabla que construyeron.

Qué observar

Cuando se plantean expresiones algebraicas se requiere un proceso deductivo y conocer los procesos que dan solución a la situación dada; permita que los alumnos analicen cada una de ellas y debatan en equipo cuál es la mejor estrategia. Vigile que cuentan con los conocimientos necesarios y que demuestran seguridad y confianza en sus capacidades; de ser necesario, oriéntelos y apóyelos para resolver sus dudas.

Cómo enriquecer la actividad

Para estas dos situaciones es importante comprobar los resultados, tabule y grafique cada una con el grupo; analice sus diferencias y trate de enfatizar de manera concreta cuál es el procedimiento que permite encontrar una expresión algebraica y tener la certeza de que es correcta.

Curiosidades, acertijos y más

A principios del siglo XVI, los matemáticos Scipione del Ferro, Tartaglia y Gerolamo Cardano resolvieron la expresión cuadrática cúbica en función de las constantes que aparecen en la ecuación.

Bitácora pedagógica

- ¿De qué manera pueden comprobar que los resultados, la tabla y la gráfica son correctos y coinciden? Tomando el tiempo obtenido y calculando la distancia.

b) Lucía tiene 5 años y hoy nació su hermana. Diseñen una estrategia que les permita encontrar una expresión algebraica que represente la relación entre las edades de ambas al paso de los años.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona ambas edades? $y = x + 5$
- ¿Qué estrategia utilizaron para encontrar esta expresión? Asignando a x como la edad de la hermana y a y como la edad de Lucía.
- ¿De qué tipo de expresión se trata? De una expresión de primer grado.
- Con esta información construyan en su cuaderno una tabla que muestre la relación entre ambas edades en los primeros 5 años.
- Elaboren en su cuaderno una gráfica en la que se muestre la relación entre las edades de Lucía y su hermana.
- ¿De qué manera pueden comprobar que sus resultados, la tabla y la gráfica son correctos y coinciden? La expresión, la gráfica y la tabla deben coincidir con la secuencia de años de las dos niñas.

2. Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con la asesoría del profesor expliquen cómo se debe analizar una situación de manera que permita identificar los datos necesarios para poder establecer una relación entre ellos.

PRACTÍCALO

Actividad 5.3

1. Analiza las siguientes situaciones y con base en lo que has aprendido hasta este momento en los contenidos anteriores, resuelve cada una a partir de sus instrucciones.

a) El señor Ramón trabaja repartiendo agua potable en una pipa. Todos los días sale con 9 000 litros de agua, y cuando abre la llave, la manguera libera 75 litros por minuto.

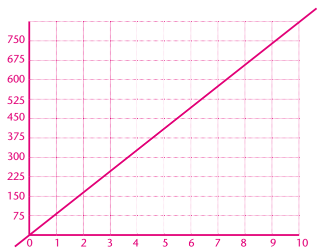
Suponiendo que dejara abierta la llave, ¿cuánto tiempo tardaría en vaciarse la pipa?

Dos horas

- ¿De qué manera determinaste este resultado?

Dividiendo los litros contenidos entre los litros liberados por minuto.

- Si consideras los primeros minutos de descarga, construye una gráfica que relacione el tiempo con la cantidad de litros de agua liberada.



Qué observar

Las situaciones planteadas son muy contrastantes entre sí, de hecho la primera requiere un mayor dominio del tema, ya que únicamente se aplica para valores positivos, tenga esto presente al momento de resolverla con los alumnos. Es conveniente que los cuestione, con la intención de hacerlos observar y deducir esto, para que la actividad la desarrollen sin complicaciones.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que analice situaciones similares de física, donde los alumnos puedan recordar y comprender el por qué solo se utilizan valores positivos para la primera situación y contrastarla con la segunda, que tiene que ver con edades.

Reflexión

"Para investigar la verdad es preciso dudar, en cuanto sea posible, de todas las cosas."

Pida a sus alumnos que reflexionen y discutan que quiere decir esta frase.

Bitácora pedagógica

Qué observar

En esta actividad trabajará con la relación entre expresiones algebraicas, tablas y gráficas. Verifique que el alumno muestra las habilidades y conocimientos necesarios, y muestra seguridad y confianza. De ser necesario, oriéntelos a fin de que puedan resolver la actividad de manera adecuada, considere que se requiere que combine varios procedimientos a la vez.

Cómo enriquecer la actividad

Organice al grupo para que den respuesta a cada una de las cuestiones, utilizando sus propios argumentos, Busque que participen todos y que se ayuden entre sí a comprobar sus resultados.

Transversalidad

Ciencias 2, Física

En diversos temas de Física, es muy común encontrar expresiones lineales o cuadráticas, pida a los alumnos que revisen las expresiones de $h = \frac{1}{2} gt^2$, $v = gt$ (caída libre); $P = mg$ (Leyes de Newton); °K = °C + 32 (termología), etc. Sugiérales que realicen una gráfica y que ellos mismo den los valores.

Matemáticas 3. Por competencias

- ¿Qué tipo de línea obtuviste? Recta

  ¿Por qué ocurrió esto? Porque los litros liberados por minuto son constantes.

- Con base en tu gráfica, construye una tabla en la que se muestre la relación entre estas cantidades.

x	y1
– 1.	–75.
0.	0.
1.	75.
2.	150.
3.	225.
4.	300.
5.	375.
6.	450.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre los minutos y la cantidad de litros?

  $y = 75x$
- ¿Cómo determinaste esta expresión?

  Observando el incremento que tiene *y* con respecto a *x*.
- ¿De qué manera puedes demostrar que la expresión es correcta y corresponde a esta situación?

  Se puede tomar la expresión y a partir de ella construir su tabla y su gráfica correspondientes, debe coincidir con las anteriores.

b) Jorge y su primo Vicente van a visitar a una de sus tías al estado de Hidalgo, durante el camino hay un tramo de carretera que está en línea recta, en este tramo la velocidad es constante y si se toma el tiempo en relación con la distancia se puede crear una tabla como la siguiente.

Tiempo en horas	1	2	3
Distancia en km	90	180	270

- ¿A qué velocidad están viajando? A 90 km/h
- ¿Cuántos kilómetros habrán recorrido si tuvieran que viajar 5 horas? 450 km
- ¿Cómo determinaste este resultado? Continuando con la secuencia en horas a 90 km.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre esas cantidades? $y = 90x$
- ¿Qué procedimiento empleaste para encontrarla?

  Analizando la secuencia, ya que presenta un incremento constante.
- Construye en tu cuaderno una gráfica que represente el avance durante las primeras 5 horas.
- Si en total, el viaje durara 8 horas, ¿a cuántos kilómetros de distancia estaría su punto de partida?

  A 720 km
- ¿De qué manera puedes comprobar que la expresión algebraica corresponde a la situación modelada?

  Tabulando y graficando la expresión, debe coincidir con los datos dados en la situación.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

2. Plantea una situación que pueda ser modelada para cada una de las siguientes expresiones algebraicas.
   a) $y = 5x + 5$
      - Escribe la situación que diseñaste.
        RM Depende del alumno, se espera que la situación corresponda a una expresión lineal.
      - Construye en tu cuaderno una tabla y una gráfica que representen esta situación, según tus datos.
   b) $y = x^2 - 2x$
      - Escribe la situación que diseñaste. Depende del alumno, se espera que la situación corresponda a una expresión cuadrática.
      - En tu cuaderno, elabora una tabla y una gráfica que representen esta situación, según tus datos.
   c) ¿De qué manera puedes comprobar que las situaciones anteriores corresponden a las expresiones algebraicas dadas? Si ahora se toman las condiciones establecidas en la situación y a partir de ellas se determina la expresión, es posible comprobar si es correcta.
3. Contrasta tus respuestas con las de tus compañeros, y con la asesoría del profesor determina la forma más adecuada de analizar alguna situación matemática cuando se asocia con algún tipo de fenómeno, ya sea físico, biológico, económico u otro.

Para leer más

Ten presente que los procedimientos para encontrar una expresión algebraica dependen del tipo de datos que estés usando. Hasta ahora conoces ya 3 procedimientos que pueden ayudarte con este contenido.

Para tener en cuenta

Ten presentes los siguientes datos:

La forma de una expresión lineal puede variar dependiendo de sus elementos, por ejemplo: $y = x + b$, o bien, $y = mx + b$.

Tanto en una expresión lineal como en una cuadrática el signo negativo hace que la gráfica cambie de sentido.

Una expresión de segundo grado puede tener varias formas, como son:

$y = ax^2$ $\quad$ $y = ax^2 + bx$ $\quad$ $y = ax^2 + bx + c$

Gráficamente, es muy notoria la diferencia entre una expresión de primer grado y una de segundo grado, en una expresión de primer grado se obtiene una recta y en una de segundo grado una parábola.

En cuanto a la comparación de los grupos de magnitudes que las representan también es sencillo identificarlas por el método de diferencias; en una expresión de primer grado, al calcular sus diferencias inmediatamente se obtiene una constante, y en una expresión de segundo grado, al calcular sus diferencias, se obtiene un nuevo grupo de magnitudes y si nuevamente se obtienen las diferencias del grupo obtenido es entonces cuando se obtiene una constante.

Recursos y materiales

Se recomienda al maestro apoyarse en la *Constitución Política Mexicana*, especialmente en los artículos del 1° al 22°.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta actividad requiere de observación y deducción para poder obtener las expresiones algebraicas adecuadas, y en la segunda parte, para poder relacionar las expresiones con las curvas que corresponden. Valore el desempeño, la seguridad que muestra y la manera en la que trabaja.

Cómo enriquecer la actividad

Si lo considera necesario, tome un tiempo para reafirmar los procedimientos que considere adecuados, pero como se trata de una actividad de autoevaluación primero permita que el alumno utilice sus propios recursos y conocimientos, incluso que revise los temas vistos anteriormente.

Reflexión

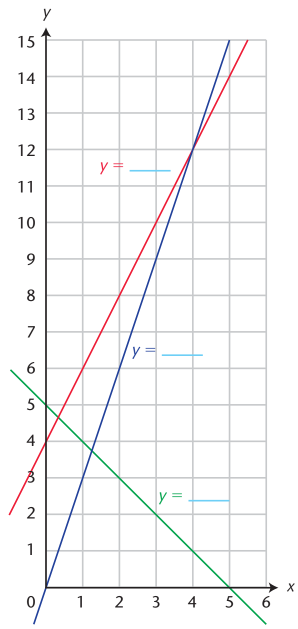
"La filosofía está escrita en ese grandísimo libro abierto ante los ojos; quiero decir, el Universo, pero no se puede entender sin antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en lo que está escrito. Está escrito en la lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos, y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar en vano en un oscuro laberinto.

Galileo Galilei.

LO QUE APRENDÍ

Analiza las líneas que se muestran en la gráfica y encuentra la expresión algebraica que representa la relación entre los ejes.

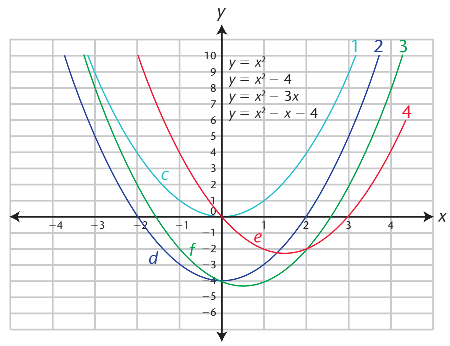
1. Lineales.



- ¿Qué expresión algebraica representa la línea azul?
  $y = 3x$
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la línea roja?
  $y = 2x + 4$
- ¿Cuál es la expresión algebraica para la línea verde?
  $y = -x + 5$
- ¿Qué estrategia utilizaste para encontrar estas expresiones?
  Se puede determinar por el incremento que sufre *y* al cambiar *x* y por los puntos donde se corta el eje "*y*".
- ¿Fue necesario que realizaras una tabla para encontrar la expresión algebraica? No
  Justifica tu respuesta. Con los datos mostrados en la tabla es suficiente.
- ¿Fue necesario construir una secuencia numérica con los valores de *y* para encontrar la expresión algebraica? No
  Explica porqué. Es posible determinarlo directamente en la gráfica.
- ¿Cómo se puede demostrar que las expresiones corresponden efectivamente a cada línea? Construyendo la tabla y la gráfica a partir de cada expresión.

2. Parábolas.

Diseña una estrategia que te permita poder relacionar las parábolas mostradas en la gráfica con su respectiva expresión algebraica.



- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la línea 1? $y = x^2$
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la línea 2? $y = x^2 - 4$
- ¿Cuál es la expresión algebraica para la línea 3? $y = x^2 - 4x - 4$
- ¿Cuál es la expresión algebraica para la línea 4? $y = x^2 - 3x$
- ¿Qué estrategia utilizaste para encontrar estas expresiones? Observando los puntos de intersección con ambos ejes.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

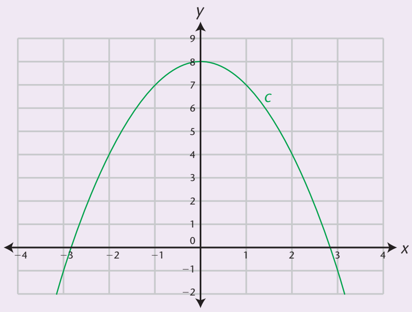
- ¿Fue necesario que realizaras una tabla para encontrar la expresión algebraica? No

  Justifica tu respuesta. Es posible encontrar la relación entre gráficas y expresiones si se analizan las gráficas correspondientes.
- ¿Fue necesario construir una secuencia numérica con los valores de y para encontrar la expresión algebraica? No ¿Porqué? Porque con los datos mostrados en la gráfica es suficiente para encontrar la relación.
- ¿Cómo se puede demostrar que las expresiones corresponden efectivamente a cada línea? Realizando la tabla y gráfica a partir de la expresión algebraica.

3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros, y con la asesoría del profesor determina la importancia de saber hacer el análisis de una gráfica y sus elementos para que sea posible determinar la expresión que modela.

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos y a partir de la gráfica dada, modelen una situación que pueda ser representada de esta manera, diseñen una estrategia para encontrar la expresión algebraica que representa.



- Escriban la situación que diseñaron. Se espera que la situación incluya un término de segundo grado negativo.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta parábola? Debe ser de la forma $y = -x^2 + c$
- ¿Qué procedimiento emplearon para obtener el dato? Depende del alumno
- ¿De qué manera se puede comprobar que la expresión corresponde a la parábola? Construyendo la tabla y la gráfica a partir de la ecuación planteada, lógicamente debe coincidir.

Comparen sus resultados con los de sus compañeros, y con la asesoría del profesor determinen qué situaciones presenta una relación de dos cantidades, la cual crea una gráfica con esta forma.

USA LAS TIC

Visita la página http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjliLCJjb2xvciI6liMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ (Consultada el día 27 de febrero de 2013. a las 15:35 horas), en ella encontrarás un graficador de funciones, esta herramienta te servirá para comprobar tus resultados, para experimentar cambiando las cantidades y los signos, y para poner a prueba tus hipótesis al momento de practicar. Después de tu visita comenten en clase su experiencia y concluyan, ¿cuál es la ventaja de tener un recurso como este y cuál es la utilidad que tiene en la vida cotidiana?

Qué observar

Esta actividad tiene como propósito que el alumno plantee una expresión algebraica, donde el signo del término de segundo grado es negativo y el independiente positivo. Verifique que los alumnos comprenden el planteamiento y que muestran seguridad al utilizar sus recursos y conocimientos para resolverlo.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que durante la actividad cuestione a los alumnos, preferentemente con preguntas que motiven el análisis de las características de la curva y de las expresiones que la representan, puede enfatizar el hecho de que el vértice esté sobre el eje de las "y", el hecho de que cruce sobre el número 8 y de que abra hacia abajo.

Transversalidad

Geografía de México y del mundo

En el INEGI se realizan diversos estudios de la población, como la economía, la natalidad, mortalidad, etc. Pídales que visiten la página http://www.inegi.org.mx/ , y que ilustren en su cuaderno las que tengan un comportamiento lineal y cuadrático.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta actividad utiliza "dados" de formas no muy comunes y combinaciones entre ellos, que puede tomar un poco de tiempo comprender. Prepare a los alumnos con una plática introductoria y deles el tiempo necesario para analizar y comprender la situación; si lo considera adecuado, realice algunas preguntas para valorar su comprensión, y luego permita que las parejas resuelvan la actividad completa.

Cómo enriquecer la actividad

Puede motivar que las parejas se comuniquen entre sí con otras para intercambiar sus puntos de vista, conclusiones y resultados. En esta actividad la realimentación es importante. También es recomendable que al final de la actividad analice los resultados frente al grupo, esto a fin de homogenizar los conocimientos adquiridos y tener en claro cuáles son los conocimientos previos que se requerirán en este contenido.

Recursos y materiales

En la página de *HDT* encontrará un interactivo que le permitirá trabajar con sus alumnos este tema.

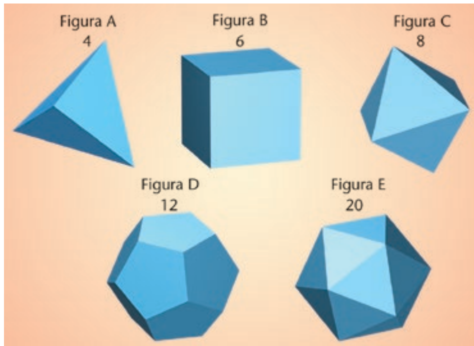
http://www.hdt.gob.mx/new_media/secundaria_1/matematicas_b5/oda_2282_0/recurso/

Matemáticas 3. Por competencias

Eje temático	Manejo de la información
Tema	Nociones de probabilidad
Contenido 6	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

ACUÉRDATE DE...

Para un juego nuevo se diseñaron unos dados con distinto número de caras, se tomaron como base algunos **poliedros** regulares.



Glosario

Poliedro. Es un sólido que está formado por caras planas y tiene volumen. Los poliedros regulares tienen caras planas formadas por polígonos regulares.

1. Analicen las condiciones dadas y diseñen una estrategia que les permita conocer si el juego es justo o no, esto es, si ofrece o no condiciones iguales para cada jugador donde cada uno tenga las mismas posibilidades de ganar, y si el dado elegido es el adecuado, según las condiciones de cada situación.

   El juego para todos los dados consiste en avanzar, sobre un tablero, el número de espacios que indique el número que quede en la cara superior del dado al ser lanzado y los puntos se van sumando. Gana el primero que llegue a 100.

   a) Juego 1: un jugador toma el dado E y el otro toma dos dados el C y el D.
      - ¿En estas condiciones el juego es justo? No Justifiquen su respuesta.
        Porque para obtener un puntaje alto el segundo jugador necesita una combinación de resultados.
      - ¿Es posible modificar el juego para asegurarse de que sea justo? Sí
        ¿Porqué? Porque se puede ajustar para tener condiciones iguales.

   b) Juego 2: un jugador toma los dados A y C, y el otro toma el dado D.
      - ¿En estas condiciones, el juego es justo? No Justifiquen su respuesta.
        Porque el puntaje alto del segundo jugador necesita una combinación de resultados.
      - Es conveniente modificar el juego? Sí ¿Porqué?
        Para que las condiciones sean verdaderamente justas para ambos.

   c) Juego 3: un jugador toma los dados A, B y C y el otro jugador el dado E.
      - ¿En estas condiciones el juego es justo? No Justifiquen su respuesta.
        Porque el puntaje alto del segundo jugador necesita una combinación de resultados.
      - Es conveniente modificar el juego? No ¿Porqué?
        Para que las condiciones sean verdaderamente justas para ambos.

Bitácora pedagógica

2. De los eventos para cada dado, ¿cuáles son justos?, es decir, ¿cuáles tienen la misma probabilidad de ocurrir? Subráyenlos.
   a) Si se toma el dado C.
      • Que salga un 5.
      • Que salga un número par.
      • Que salga un 4.
      • Que salga un múltiplo de 2.
      • Que salga un 3.

   Los eventos 1, 3 y 5 tienen la misma probabilidad, así como los eventos 2 y 4.

   b) Si se toma el dado D.
      • Que salga un 7.
      • Que salga un 15.
      • Que salga un número primo.
      • Que salga un número non.
      • Que salga un número entre 6 y 12.
   c) Si se toma el dado E.
      • Que salga el 20.
      • Que salga un número impar.
      • Que salga un número par.
      • Que salga un número entre 5 y 15.
      • Que salga un múltiplo de 3.

   Los eventos 1 y 5 tienen la misma probabilidad, así como los eventos 2 y 3.

3. Contrasten sus respuestas con las de sus compañeros, y con la ayuda del profesor determinen aspectos que se deben considerar al determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento y en qué influye esto en determinar si un juego es justo o no para los participantes.

En estudios anteriores has analizado algunos eventos y juegos que dependen de la probabilidad, pero que con base en una condición, al analizarlos, puedes decidir si es más probable que ocurran o es menos probable.

PRACTÍCALO **Actividad 6.1**

1. Analicen las situaciones planteadas y determinen una manera de saber si lo que indican es justo o injusto, según cada condición. Suponiendo que dos alumnos plantean cada evento como un experimento por realizar. Completen la tabla.

Evento	¿Es justo o injusto?	Justificación
Lanzar dos monedas al aire, (con sello y cara) si caen dos sellos uno gana, si no, gana el otro.	Injusto	La probabilidad de ganar es $\frac{1}{4}$ y de perder es de $\frac{3}{4}$
Lanzar dos dados, si la suma de sus caras es más de 7 uno gana, si no, gana el otro.	Injusto	Que sumen 7 tiene más probabilidad de que sume cualquier otro número
En una ruleta uno gana si cae un número par, el otro gana si cae un impar.	Justo	Los dos tienen la misma probabilidad de ganar.

Qué observar

Esta actividad requiere concentración y razonamiento. Permita que los alumnos discutan en equipo la situación y justifiquen las respuestas que obtengan; vigile que colaboren entre ellos y manejen los conceptos de manera adecuada.

Cómo enriquecer la actividad

Es aconsejable que los alumnos utilicen su cuaderno para hacer anotaciones o diagramas que les sean de utilidad; motive el uso de diagramas de árbol o cartesianos y, si es necesario, oriéntelos sobre cómo utilizarlos. Comente los resultados frente al grupo y traten de definir cuándo una condición es justa y cuándo no.

Curiosidades, acertijos y más

A través de acertijos permita que los alumnos analicen su posible solución con una lluvia de ideas. ¿Cuántas veces necesitas extraer una bola de color de una urna que contiene 5 bolas negras y 5 blancas para asegurarte de que tienes un par del mismo color?

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta actividad tiene como propósito determinar que una condición puede favorecer ciertos resultados, aunque no se vea de manera evidente. Es importante que los alumnos la razonen y realicen correctamente, para que puedan deducir la desigualdad que presenta. Permita que experimenten en varios tiros entre parejas y que se den cuenta por ellos mismos qué números salen más que otros.

Cómo enriquecer la actividad

Es conveniente que oriente a los alumnos a elaborar una tabla con la suma de los resultados de los dados, esto ilustrará cómo las condiciones no son favorables para todos los números y cómo cambia la probabilidad de cada uno y que, por lo tanto, se transforma también en un juego de estrategia, pero que por azar es un juego injusto. Valore el momento adecuado para presentarlo y analizarlo.

Reflexión

Pida a sus alumnos que reflexiones esta frase.

"Confía en ti mismo. Crea la clase de ser con quien serías feliz de vivir toda tu vida. Haz de ti mismo todo lo que puedas, atizando las pequeñas chispas internas de posibilidad, para que se convierta en las llamas del logro."

Golda Meir.

Evento	¿Es justo o injusto?	Justificación
En una baraja, uno gana si primero sale un 4 y el segundo gana si primero sale un 6.	Justo	Los dos tienen la misma probabilidad de ganar.
Uno gana si al tomar una ficha de dominó la suma de sus puntos es mayor que 8; si no, gana el otro.	Injusto	El segundo tiene más probabilidades de ganar.

- ¿Qué fue lo que les permitió poder juzgar si la condición dada para cada evento era justa o no? Analizar los eventos en comparación al juego propuesto.
- De los eventos que consideraron injustos, seleccionen uno y expliquen, ¿qué condición se necesitará para hacerlo justo? Analizar los eventos en comparación al juego propuesto.
- ¿Consideran que pueden utilizar este mismo criterio de la misma forma para todos los juegos de azar? No Expliquen su respuesta. Todos deben ser justos, pero cada uno requiere sus propias condiciones.

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y con la ayuda del profesor determinen los indicadores que hacen notar si un juego de azar es justo o injusto, y de qué depende que una persona sea capaz de decidir esto.

PRACTÍCALO

Actividad 6.2

1. Preparen dos dados para hacer esta actividad, lean y preparen el juego y después contesten las preguntas.

Seleccionen cuatro objetos pequeños que puedan utilizar como fichas, pueden ser monedas, sacapuntas, gomas, tapas de plumas, etcétera. Coloquen los objetos en 4 de las casillas de su respectivo tablero, como el que se muestra a continuación.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Reglas.

1. Cada jugador tirará los dados por turnos.
2. En cada tirada deberán sumar los puntos que tengan los dados en la cara superior.
3. Si el número de puntos coincide con alguno de los números que tienen ficha, el jugador que tiró podrá pasar esa ficha al jugador del lado contrario y colocarla en una de sus casillas.
4. Si al tirar la suma de puntos no coincide con ninguno de sus números que tienen ficha, el turno pasa al otro jugador.
5. Gana el primero que logre deshacerse de todas las fichas.

Bajo la supervisión y coordinación del profesor, jueguen tratando de encontrar la mejor estrategia para ganar.

2. Analicen las condiciones que se van presentando, determinen si el juego es justo o no, argumenten su conclusión.
   - ¿Todos los números del tablero tienen la misma posibilidad de salir? No

   ¿Por qué ocurre esto? Porque las sumas de los números no es igual para todas las cantidades, el que más se repite es 7 y los que menos se repiten son 2 y 12. Y de hecho no hay posibilidades de que salga el 1.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

- ¿Consideran que las condiciones de este juego son justas o injustas? Injustas

  Expliquen su respuesta. Permite escoger números con mayor probabilidad de ganar.

- ¿Tienen los dos jugadores la misma posibilidad de ganar? No

  ¿Porqué? Porque si quisieran tener todos las máximas oportunidades, tendrían que apostar al 7.

- Después de haber jugado varias partidas, ¿cuál puede ser una buena estrategia para ganar el juego?

  Apostar al 7 o a las sumas cercanas a él

- ¿Por qué consideran que esta estrategia da alguna ventaja al jugador? Porque al apostar a números que tienen más probabilidad de ocurrir, incrementa su probabilidad de ganar.

- ¿Consideran que los dados les da cierta ventaja a algunos números del tablero o les da la misma oportunidad a todos? Sí Justifiquen su respuesta. Hay números que tienen mayor probabilidad de salir.

- ¿Qué estrategia sugieren que se utilice para tener la seguridad de que los números del tablero tienen la misma posibilidad, o no? No es posible con dos dados, tan solo porque no es posible que la suma de 1.

- ¿Cuál sería una forma de plantear el juego de modo que sea justo para ambos jugadores? Podría ser que ambos pudieran escoger cualquier casilla y con un solo dado sumar o restar en cada tiro los puntos que faltan para llegar al número que apostaron.

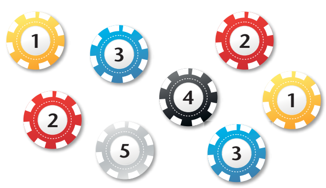
  Expliquen su respuesta. Las condiciones son justas para ambos porque tienen las mismas opciones y usan un solo dado.

3. Contrasten sus resultados con los de sus compañeros, y con la ayuda del profesor expongan algunos puntos de vista acerca de este juego y determinen qué condiciones permiten evaluar si el juego es justo o no.

PRACTÍCALO **Actividad 6.3**

1. Lean la situación planteada y contesten las preguntas.

   a) En una urna tapada se encuentran colocadas fichas numeradas, analicen la imagen y diseñen una estrategia que les permita encontrar la probabilidad de ocurrencia de los eventos indicados del lado derecho, realizando las extracciones que sean necesarias.



Un cuatro y un cinco
Un uno y un dos
Un dos y un tres
Un uno
Un uno, un dos y un tres
Un tres y un cuatro
Un uno, un dos, un tres y un cuatro

- ¿Consideran que todos los eventos tienen la misma probabilidad de ocurrir? No

  Expliquen su respuesta. Solo dos eventos tienen la misma posibilidad de ocurrir.

- Si se le pide a dos personas que seleccionen cada uno un evento diferente, ¿es posible que escojan uno donde las dos tengan la misma posibilidad de ganar? Sí

  ¿Por qué? Solo hay dos eventos que tienen la misma posibilidad, tendrían que ser el segundo y el tercero.

Qué observar

Las condiciones que presenta esta actividad son muy variables, es conveniente que sean analizadas y discutidas en equipo. Permita que se realice con el tiempo suficiente y ponga especial atención en cómo responden y justifican. Si lo considera adecuado, plantee algunas preguntas reflexivas, pero permita que utilicen sus propios recursos.

Cómo enriquecer la actividad

Si realizan un registro escrito de cada una de las condiciones dadas será más sencillo que las analicen. Es conveniente que también anoten la probabilidad de cada uno, esto les dará una idea más clara de qué se pregunta y responderán con más seguridad.

Transversalidad

Historia 2

En el segundo grado de educación secundaria, los alumnos revisaron el imperio Otomano, Mongol y Chino. Solicite a los alumnos que investiguen acerca de los juegos de azar que practicaban en China.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Permita que el alumno analice y reflexione las condiciones en las que está dado el juego. Observe si automáticamente piensa que es un juego de azar o realiza algo para cerciorarse, la idea es que se dé cuenta que es un juego de estrategia y que es posible determinar al ganador bajo ciertas condiciones.

Cómo enriquecer la actividad

Si lo considera prudente, transforme esta actividad de individual a parejas y permita que jueguen intercambiando los turnos de inicio; esto ayudará a que se den cuenta que la persona que inicia, si retira las piezas adecuadas, gana, y que, por lo tanto, no se trata de un juego de azar. También es posible que los oriente realizando algunas preguntas reflexivas o haciendo que simulen un juego contra ellos mismos.

Recursos y materiales

En la página *Encicloabierta* encontrará un simulador de un lanzador de monedas, que le permitirá trabajar de manera interactiva con sus alumnos este tema.

http://recursos.encicloabierta.org/telesecundaria/1tls/1_primero/1_Matematicas/1m_b03_t09_s01_interactivo/index.html

- ¿Cuál de los eventos consideran que tiene menos probabilidad de ocurrir? El primero y el cuarto

  ¿Cómo determinaron esto? Su probabilidad es de $\frac{1}{4}$ que es la más baja de todas.

- De los eventos que requieren dos extracciones, ¿cómo se puede saber cuál de ellos tiene más probabilidad de ocurrir? Sumando su probabilidad Entonces, ¿entre estos eventos cuál tiene mayor probabilidad? El último
- ¿Cómo modificarían las fichas de la urna y los eventos del recuadro para tener la seguridad de que el juego es justo? Colocando fichas con las mismas condiciones y proponiendo eventos que no favorezcan a ninguno de los jugadores.

2. Comparen sus resultados con los de los otros equipos, y con la asesoría del profesor determinen cómo se puede saber la probabilidad de ocurrencia de un evento donde las opciones presentan condiciones distintas.

Para leer más

Los eventos equiprobables son los que tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Los eventos que no cumplen con esta condición son llamados no equiprobables e indican que alguna de las condiciones no es igual para cada evento.

Para tener en cuenta

Recuerda que la probabilidad de un evento utiliza la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

Y para que puedas determinar si un juego es justo o no, únicamente requieres calcular la probabilidad teórica (o clásica) del evento que interviene en el juego y analizarlo. Ten en cuenta que no es posible considerar, únicamente, los resultados que se obtienen jugando.

LO QUE APRENDÍ

1. Lee la siguiente situación y con base en lo que has aprendido hasta ahora, resuelve la actividad.

   a) En una clase de matemáticas el profesor lanzó un reto, el cual consistía en llevar a cabo un juego sencillo entre dos alumnos: a cada uno le dio 12 fichas y las colocó como se muestra en la imagen, luego dijo, lanzando una moneda, vamos a determinar quién inicia el juego. Se utilizarán turnos alternados, quitarán por cada uno, entre una y tres fichas, repetirán esta operación hasta que a un jugador le quede sólo una ficha; el que lo logre, gana.

Bitácora pedagógica

BLOQUE 5

- ¿Consideras que este juego es justo? No Explica tu respuesta.
  No es un juego de azar, es un juego de estrategia.
- ¿Consideras que éste es un juego de azar bien elaborado? No
  ¿Por qué? El jugador gana desde que lanzan la moneda, el primero que tire es quien va a ganar.
- ¿De qué depende que un jugador pueda ganar? De ser el primero en tirar.
- ¿Es posible encontrar una estrategia para poder ganar de manera segura? Sí
- ¿Qué se debe modificar en este juego para que sea de azar y sea justo?
  Que no puedan decidir la cantidad de fichas que quitar y que decidan quién empieza con una moneda.

b) Cambiemos las reglas del juego anterior, ahora, cada jugador participará arriesgando una ficha a la vez, si gana, se queda con la ficha del contrario, si pierde se la da.

Reglas del juego

El jugador uno gana si al lanzar dos dados la diferencia entre sus puntos es 0, 2 o 4, y gana el jugador dos si al lanzar dos dados la diferencia entre sus puntos es 1, 3 o 5.

- ¿En estas condiciones, el juego es justo? Sí Justifica tu respuesta.
  Que no puedan decidir la cantidad de fichas que quitar y que decidan quién empieza con una moneda.
- ¿Consideras que hay posibilidad de que algún jugador encuentre una estrategia para tener mayor probabilidad de ganar? No Explica tu respuesta.
  El juego depende totalmente del azar, pero el primer jugador tiene más oportunidades que el segundo.
- ¿Consideras que es conveniente modificar el juego? Sí
  ¿Por qué? Porque es necesario igualar las condiciones para ambos.

2. En la imagen se muestran todas las posibles permutaciones al lanzar dos dados.

6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	1	2	3	4	5	6

a) Elabora en tu cuaderno una tabla en la que se muestren las diferencias para cada uno y una tabla de frecuencias.

- ¿Las diferencias obtenidas, tienen la misma probabilidad? No
  ¿Cómo llegaste a esta conclusión? Contando las posibilidades favorables para cada uno.
- Entonces, ¿es posible asegurar si este juego es justo o no?
  Explica tu respuesta. Sí es posible
  El juego no es justo porque favorece a uno de los jugadores.

3. Compara tus resultados con los de tus compañeros, y con la asesoría del profesor determina cómo se identifican y comprenden las condiciones que son necesarias para que un juego de azar sea justo al analizar sus resultados y observar si son equiprobables o no.

Curiosidades, acertijos y más

A mediados del siglo XIX, el fraile Gregor Medel inicio estudios sobre la herencia (genética). Su obra, *La Matemática de la Herencia*, fue una de las primeras aplicaciones importantes de la teoría de la probabilidad a las ciencias naturales.

Bitácora pedagógica

Qué observar

Esta actividad combina varias situaciones que requieren analizarse con calma y reflexionarlas. Es muy necesario que el alumno comprenda e imagine lo necesario para poder responder. Vigile que comprende el contexto y la intención de la actividad, y que los equipos argumenten sus opiniones y justifiquen sus respuestas.

Cómo enriquecer la actividad

Es un poco complicado simular esta situación en clase; sin embargo, es posible representar las situaciones mediante bosquejos o esquemas, preferentemente se debe trabajar en equipos y, durante la actividad, es conveniente cuestionarlos acerca de las respuestas que van obteniendo. Al final es posible responder de manera grupal, dando la oportunidad de que algunos alumnos justifiquen cada respuesta.

Matemáticas 3. Por competencias

USA LAS TIC

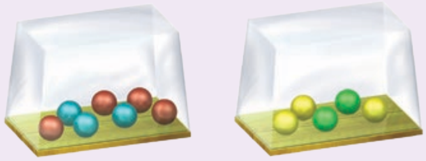
Visita la página http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsa01g01v02/u03t04s02.html (Consultada el día 27 de abril de 2013, a las 16:01 horas), en ella encontrarás una breve explicación acerca de los juegos de azar y podrás analizar si son justos o injustos, además de contener actividades que puedes practicar con tus compañeros. Después de tu visita es conveniente que intercambien impresiones en grupo, y con la asesoría de tu profesor determina: ¿qué ventajas tiene poder contrastar los conocimientos que tienes de este tema con otras fuentes de información?

Desarrolla tus habilidades

1. Reúnanse en equipos, analicen la situación dada y respondan las preguntas.

   a) Liliana fue a un campamento de verano en el cual se sortearon todos los quehaceres para que todos cooperaran. Hoy, van a sortear las guardias, cada una dura 6 horas, dos son de día y dos de noche; la regla es la siguiente:

   El jefe de guardia lanza un volado, si cae cara, toca una guardia de día, y si es cruz, una guardia de noche; luego cada uno selecciona una bola de la urna que le tocó y dependiendo del color es el horario de su guardia. Roja, de 0 a 6 horas; azul, de 6 a 12 horas; amarillo, de 12 a 18 horas; y verde, de 18 a 24 horas.



Cara Cruz

- ¿Consideran que el sistema del campamento es justo, es decir, les da la misma oportunidad a todos los participantes? Sí

  Expliquen su respuesta. Aunque en las urnas hay distintas posibilidades, ninguna favorece a algún participante.
- Según las condiciones que se pueden ver en las urnas, ¿qué es más probable para el siguiente participante, que le toque de día o de noche? Es igual Expliquen su respuesta.

  Porque esto lo decide el lanzamiento de la moneda.
- ¿Qué es más probable, que le toque al siguiente participante una bola verde o una roja si aún no ha tirado el volado? Es igual

  Expliquen su respuesta. Porque al tirar el volado es posible que después le toque una verde o puede ser una roja.
- Si Luis le dice a Francisco que hay la misma probabilidad de que le toque una bola amarilla o una azul, ¿tiene razón? Sí

  ¿Porqué? Porque puede ser que sea alguna por el volado y en la urna hay la misma cantidad de cada una.
- Pedro quiere que le toque la guardia de la tarde, de 12 a 18 horas, si él es el próximo en extraer una bola, ¿qué probabilidad tiene de cumplir su deseo? $\frac{3}{10}$
- ¿Cómo encontraron esta cantidad?

  Al multiplicar la probabilidad de la urna por la de las esferas amarillas.
- ¿Hay alguna manera de mejorar este juego y hacerlo más justo? Sí

  ¿Porqué? Colocando la misma cantidad de esferas de colores en cada urna.

2. Contrasten su respuesta con la de sus compañeros, y con la asesoría del profesor determinen de qué manera influye en un evento el hecho de que dependa de otro para poder ocurrir.

Reflexión

Junto con sus alumnos comente este pensamiento.

"Solo existe una cosa capaz de hacer un sueño imposible de alcanzar, el miedo al fracaso."

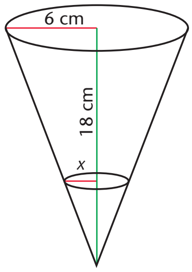
Paulo Coelho.

Bitácora pedagógica

Evaluación tipo PISA

1. En una fábrica de cajas de cartón refuerzan las dos tapas para brindar seguridad. Si se suman los perímetros de las dos tapas cuadradas de una caja, el resultado es 48 cm y si se suman sus áreas el resultado es 72 cm^2. ¿Cuánto mide el lado de cada tapa? 6 cm

2. Laura es repostera y para aplicar la cubierta de sus pasteles utiliza conos que corta, de acuerdo a sus necesidades. Si realiza un corte en un cono, de forma paralela a su base circular a un tercio de su altura partiendo de la cúspide, ¿cuánto mide el radio de la nueva base?

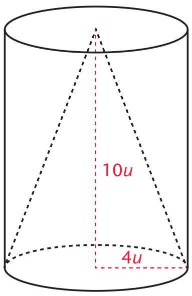


a)	3 cm
b)	1 cm
c)	4 cm
d)	2 cm

3. El señor Correa fabrica dulces tradicionales mexicanos, hoy va a hacer chupirules, para lo cual utiliza moldes como el que muestra la imagen. ¿Cuál es el volumen del cono? 167.55u^3

Explica, ¿cuál fue la estrategia que utilizaste para encontrar estas medidas?

Se toman los datos dados y se sustituyen en la fórmula del volumen del cono, se realizan las operaciones indicadas y con esto se obtiene el volumen del cono.



4. De las siguientes afirmaciones, selecciona la que describe de manera adecuada la relación que hay entre el volumen de un cono cuando se modifica una de sus dimensiones, ya sea la altura o el radio de la base.

a)	Cuando se modifica alguna de las medidas de un cono, el volumen se incrementa o disminuye, dependiendo de la modificación hecha.	Sí	No
b)	Cuando se modifica la altura de un cono se sabe que su volumen se modifica en una tercera parte del volumen original, y cuando se modifica su radio el volumen se modifica de manera proporcional.	Sí	No
c)	Cuando se modifica la altura de un cono su volumen se modifica de manera proporcional, y cuando se altera la medida de su radio se modifica de forma cuadrática.	Sí	No
d)	Cuando se modifica la altura de un cono se debe incrementar también el radio de su base para que el incremento de volumen sea proporcional.	Sí	No

Qué observar

Procure que al resolver la evaluación, se tengan las mejores condiciones. Prepare lo necesario para que nada incomode la prueba y, antes de aplicarla, oriente a los alumnos en cómo está diseñada, para tratar de disminuir lo más posible las dudas durante la aplicación

Cómo enriquecer la actividad

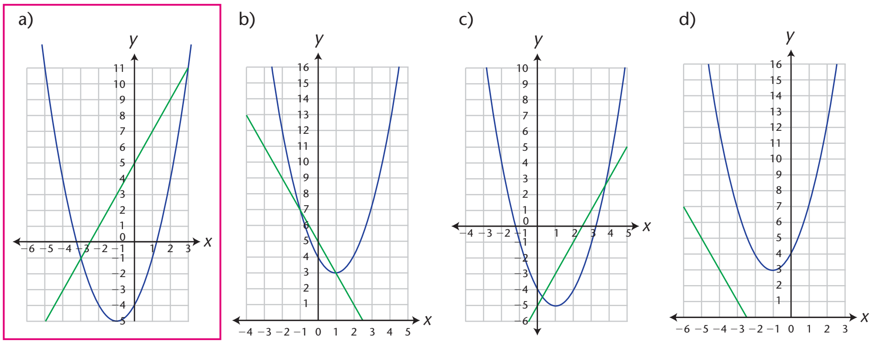
Motive a los alumnos para que resuelvan esta evaluación de forma honesta; resalte su importancia y la utilidad que puede tener para mejorar su nivel actual de conocimientos. Procure que tomen la evaluación como algo habitual, bueno y sano, es decir, como parte del proceso de aprendizaje de las Matemáticas.

Bitácora pedagógica

Matemáticas 3. Por competencias

Evaluación tipo PISA

5. La cantidad de residuos para reciclaje de una fábrica está dada por la sucesión 4, 11, 20, 31, 44, … ¿Cuál de estas gráficas representa la razón de cambio de esta sucesión, así como la recta que se obtiene a partir de las diferencias?



Cuadro base

- Explica qué estrategia utilizaste para determinar cuál es la gráfica correcta.

Primero se determina la expresión algebraica de la sucesión, se trata de la expresión de segundo grado $x^2 + 4x - 1$, luego a partir de sus diferencias se obtiene la sucesión 7, 9, 11, 13, y al calcular su expresión algebraica se obtiene $2x + 5$, ahora lo que resta es tabular y graficar para obtener el resultado.

6. Josefina, Marielena y Francisca están jugando una carrera usando dos fichas marcadas cada una con los signos (+) y (−) sobre un tablero con tres carriles y 10 espacios por recorrer. Josefina avanza si en las dos fichas cae (+) y (+), Marielena avanza si cae (−) y (−) y Francisca avanza si caen los signos combinados en cualquier orden, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

	Condición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	META
Josefina	(+)(+)										
Marielena	(−)(−)										
Francisca	(+)(−)										

a) El juego es justo, ya que una las combinaciones con las que avanzan tienen la misma probabilidad de ocurrir.

b) El juego es injusto porque Francisca tiene más probabilidades de avanzar.

c) El juego es justo porque todas están jugando con las mismas fichas.

d) El juego es injusto porque tiene la misma probabilidad de salir dos fichas con el mismo signo o bien con signos combinados.

Bitácora pedagógica

Bibliografía consultada

Asencio, Ma. J., *Estadística.* Madrid, McGraw-Hill, 2006.

Baldor, A., *Algebra*., México, Publicaciones culturales., 2006.

Baldor, A., *Geometría plana y del espacio.*, España, Cultural centroamericana, 2003.

Caballero, Arquímedes. *Matemáticas, tercer curso*, México, Esfinge. 2001

Clemens, S. *et al. Geometría.* EUA, Addison-Wesley Iberoamericana, 2005.

Collins, W. *et al.*, *Algebra 1*. EUA, Glencoe-McGraw-Hill, 2006.

Enciclopedia Estudiantil Visual, Barcelona-Colombia, Thema, 1997.

Enciclopedia Matemática, México, Grijalbo, 2009.

Goodson y Miertschin, *Álgebra con aplicaciones técnicas*, México, Limusa, 2004.

Jacobs, H., *Geometry*, EUA, Freeman, 2006.

Murray, R. S., *Estadística*, México, Schaum-McGraw-Hill, 2002.

Newman, J., *El mundo de las matemáticas tomo I*, Barcelona, Grijalbo, 1976 (Sigma, tomo 1).

Oteyza, L., *Álgebra*, México, Pearson Educación, 2003.

Sada, G., María Teresa, *Álgebra,* México, FCE, 2005.

Sánchez, O., *Probabilidad y estadística*, México, McGraw-Hill, 2000.

SEP, *Geometría dinámica.* EMAT. Educación secundaria, México, 2000.

SEP, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo.* EMAT. Educación secundaria, México, 2000.

SEP, *Fichero de actividades didácticas matemáticas*, Educación secundaria, México, 2000.

SEP, *Plan de estudios.*, Educación Básica. Secundaria, México, SEP, 2011.

SEP, *Programa de estudio.* Matemáticas. Educación Básica, México, SEP, 2011.

Seymour, L., *Probabilidad*, México, Schaum-McGraw-Hill, 1995.

Swokowski, E., *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, EUA, Universidad de Missouri, 2006.

Bibliografía para el estudiante

Agnus, H., *El diablo de los números*, España, Siruela, 2003.

Asimov, I., *El libro de los sucesos*, México, Lasser Press, 2011.

Diccionario Esencial de Matemáticas, México, Larousse, 2006.

Escandón, Rafael, *Curiosidades matemáticas*, México, Diana, 2009.

Gonick, L. S., *La estadística en cómic*, Barcelona, Zendrera Zariquiey, 2003.

Gutiérrez, Yavé, *Acertijos matemáticos*, México, Editores Mexicanos Unidos, 2004.

Perero, Mariano, *Historia e historias de las matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2003.

Sagan, C., *Cosmos*, Barcelona, Planeta, 2004.

Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Limusa, 2004.

Bibliografía

Bibliografía para el profesor

Aebli, H., *Doce formas básicas de enseñar. Una didáctica basada en la psicología*, Madrid, Narcea, 1995.

Asimov, I., *Nueva guía de la ciencia*, Barcelona, Plaza & Janés, 1997.

Brousseau, G., "Educación y didáctica de las matemáticas", en *Educación matemática,* Vol. 12, No. 1, México, Iberoamericana, 2000, pp. 5-38.

Carreher, T., *En la vida diez, en la escuela cero*, México, Siglo XXI, 1991.

SEP, *Fichero de actividades didácticas, Matemáticas*, México, SEP, 2001.

Hofstadter, D. y Escher Gödel, *Bach: una eterna trenza dorada*, México, CONACYT, 1979.

INEE, *PISA para docentes: la evaluación como oportunidad de aprendizaje*, México, 2005.

Pereda, L., *Didáctica de la resolución de problemas*, Bilbao, Descleé De Brouwer, 1987.

Peña, J. A. de la, *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*, México, Siglo XXI, 2002.

Piaget, J., *Psicología y pedagogía*, Barcelona, Crítica, 2005.

Sánchez, Octavio, *Probabilidad y estadística*, México, McGraw-Hill, 2000.

Skinner, B. F., *Sobre el conductismo*, Barcelona, Fontanella, 1975.

Stacey, K., *Resolver problemas: estrategias*, Madrid, Narcea, 1999.

Vygotsky, L., *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Barcelona, Crítica, 2003.

Fuentes electrónicas

http://almez.pntic.mec.es/ (presenta un recorrido descriptivo, a lo largo de los siglos, de las diferentes civilizaciones que hicieron aportaciones al campo de las matemáticas).

http://basica.sep.gob.mx/reformasecundaria/matematicas/tercer_grado.html (página oficial de la Secretaría de Educación Pública. Contiene orientaciones didácticas, bibliotecas y sitios de internet que pueden ser de interés para el docente o el alumno.

http://descartes.cnice.mecd.es/ (página interactiva con los contenidos de matemáticas en la enseñanza secundaria, juegos, trucos, etcétera).

http://fismat.umich.mx/omm/ (página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas).

http://sepiensa.org.mx/ (página de la SEP, con diversas actividades e información de matemáticas).

http://olimpiada.mat.uson.mx/ (página de las olimpiadas sonorenses de matemáticas; incluye exámenes y problemas).

http://www.thatquiz.org/es/ (página para realizar ejercicios de matemáticas de todo tipo).

http://www.matematicas.net/ (página dedicada al fascinante universo de las matemáticas; contiene apuntes, ejercicios, exámenes, juegos, enlaces, historia, etcétera).

http://www.mlevitus.com/ (página de juegos, acertijos y recreaciones matemáticas).

http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/ (sitio del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa).

Créditos iconográficos

© ShutterStock pp.14, 15, 28, 75, 122, 123, 164, 165, 178, 180, 202, 220, 221, 232. © Depositphotos pp. 15, 53, 74, 75, 117, 122, 123, 165, 178, 180, 221. Archivo Edimend pp. 15, 75, 180, 221.

Matemáticas 3
Por competencias

Guía del Maestro

El libro **Matemáticas 3. Por competencias** ha sido elaborado con el propósito de que el alumno desarrolle conocimientos, habilidades y actitudes matemáticas, a fin de que sea capaz de generar métodos y situaciones encaminadas a la solución de problemas en el aula y en la vida cotidiana.

Las actividades que propone **Matemáticas 3. Por competencias** proporcionan al alumno una guía para entender el contenido teórico de las matemáticas, lograr el aprendizaje esperado y por tanto, el desarrollo de competencias como: pensar, razonar, argumentar, comunicar, representar, elaborar modelos, plantear y resolver problemas, utilizar lenguaje y operaciones tanto simbólicas como formales y técnicas, por mencionar algunas.

Matemáticas 3. Por competencias incluye además secciones que permitirán al alumno complementar su aprendizaje haciendo uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), poner a prueba sus competencias matemáticas mediante desafíos y retos para desarrollar más habilidades.

ISBN 978-607-32-2763-6

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com